目　录

绪论 …………………………………………………………………… (I)

第1章　矢量分析

1.1 绪论……………………………………………………… (1)

1.2 坐标的旋转…………………………………………… (6)

1.3 标量积（内积）……………………………………… (15)

1.4 矢量积（外积）……………………………………… (21)

1.5 标量三重积与矢量三重积…………………………… (28)

1.6 梯度 ∇…………………………………………………… (35)

1.7 散度 ∇· ……………………………………………… (40)

1.8 旋度 ∇× ……………………………………………… (44)

1.9 用∇连续作用得到的量……………………………… (51)

1.10 矢量积分 …………………………………………… (55)

1.11 高斯定理 …………………………………………… (61)

1.12 斯托克斯定理 ……………………………………… (65)

1.13 势论 ………………………………………………… (70)

1.14 高斯法则和泊松方程 ……………………………… (81)

1.15 赫姆霍兹定理 ……………………………………… (85)

第2章　坐标系

2.1 曲线坐标……………………………………………… (94)

2.2 微分矢量算符………………………………………… (97)

2.3 特殊坐标系——笛卡儿直角坐标系 ………………(101)

2.4 球坐标 (r, θ, φ) …………………………………(103)

2.5 分离变数 ……………………………………………(112)

2.6 圆柱坐标 (ρ, φ, z)……………………………………(117)

2.7 椭圆柱坐标 (u, v, z)……………………………………(123)

2.8 抛物柱坐标 (ξ, η, z)……………………………………(126)

2.9 二极坐标 (ξ, η, z) ……(127)
2.10 长球面坐标 (u, v, φ) ……(133)
2.11 扁球面坐标 (u, v, φ) ……(138)
2.12 旋转抛物面坐标 (ξ, η, φ) ……(140)
2.13 圆环面坐标 (ξ, η, φ) ……(144)
2.14 双球面坐标 (ξ, η, φ) ……(147)
2.15 共焦椭圆体坐标 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ……(149)
2.16 锥面坐标 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ……(150)
2.17 共焦抛物面坐标 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ……(152)

第 3 章 张量分析

3.1 绪论，定义……(154)
3.2 缩并，直积……(161)
3.3 商的规则……(163)
3.4 赝张量，对偶张量……(165)
3.5 并矢式……(174)
3.6 弹性理论……(178)
3.7 麦克斯韦方程的洛仑兹协变性……(189)

第 4 章 行列式，矩阵，群论

4.1 行列式……(199)
4.2 矩阵……(206)
4.3 正交矩阵……(219)
4.4 斜交坐标……(233)
4.5 厄米特矩阵，么正矩阵……(237)
4.6 矩阵的对角化……(245)
4.7 群论的引入……(258)
4.8 点群……(264)
4.9 连续群……(271)
4.10 生成元……(282)
4.11 $SU(2)$，$SU(3)$ 和基本粒子……(290)
4.12 齐次洛仑兹群……(295)

第1章 矢 量 分 析

1.1 绪 论

在科学或工程里，经常遇到象质量、时间、温度那样只有大小的量。把这些量叫做标量。另一方面，也有相当多有趣的物理量不仅有大小还有方向。其中包括位移、速度、加速度、力、动量、角动量，这种有大小和方向的量叫做矢量。在初步的定义里，一般矢量是有大小和方向的量。为区别矢量与标量，凡是矢量比如**V**都用黑体字。

到目前举出的矢量，都是在力学里经常用的量，饶有兴趣的历史侧面倒是，矢量分析并不是在力学的创立与发展的过程中而创立与发展起来的。随着麦克斯韦理论的发展，发现电磁场量的矢量性是它的固有性质，这才开始认识到矢量分析的必要性。

为方便起见，矢量总是用具有与大小成正比的长度的一根箭头来表示。用箭头方向表示矢量的方向，箭头代表它的方向的正向。在这种表示方法当中，矢量和

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \tag{1.1}$$

是把矢量**B**的始端置于矢量**A**的末端即可得到。这时从**A**的始端引向**B**的末端就能得到矢量**C**。根据这一手续，方程(1.1)就具有具体的意义。这个手续叫做和的三角形法则，如图1.1所示。

如图1.2所示由平行四边形可知

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{1.2}$$

同理，由图1.2也能看出

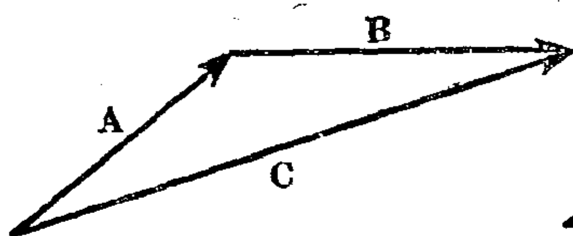


图 1.1　矢量和的三角形法则

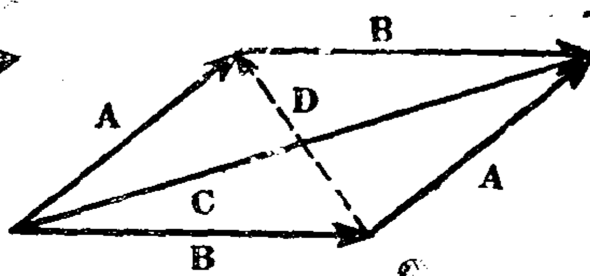


图 1.2　矢量和的平行四边形法则

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$$

作为表示有关矢量和的平行四边形法则的具体例子，可以考虑用两根弦吊起的物体。如图 1.3 所示，结合点 O 平衡时，两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的矢量和必须与向下的重力 $\boldsymbol{F}_3$ 刚好平衡。在这种情况下可以从实验上验证平行四边形法则●。

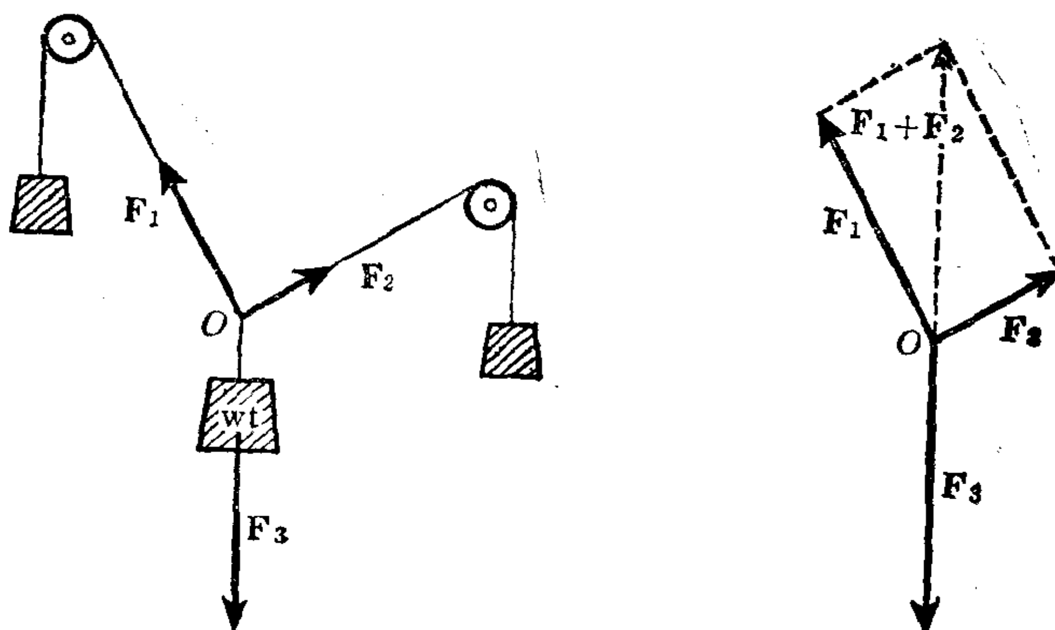


图 1.3　力的平衡 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_3$

●严格讲，平行四边形法则由一个定义加以规定。假定力为矢量，利用平行四边形法则时，从实验上可以肯定力是平衡的。

须注意矢量是与坐标系无关的几何学上的东西。实际上到目前为止，还没有用任何坐标系。也就是说与坐标系的取法无关，在下一节里还要详细阐述这一想法。

现在来考虑基于用箭头表示矢量$\boldsymbol{A}$的第二种表示方法。如图1.4所示，矢量$\boldsymbol{A}$从原点●出发在点（x_1，y_1，z_1）终止。这样令矢量是从原点出发的箭头时，通过给定箭头尖端的直角坐标（x_1，y_1，z_1），就能够决定该矢量的尖端。

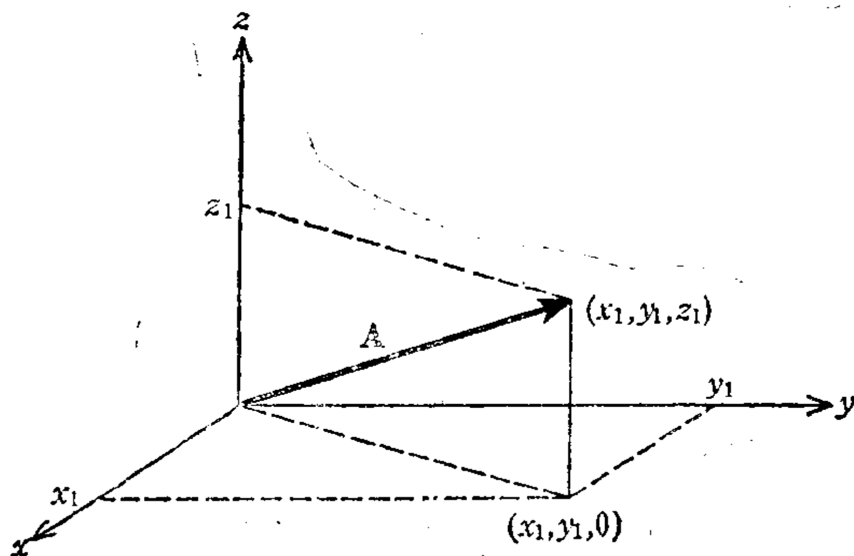


图 1.4　笛卡儿分量

$\boldsymbol{A}$虽用来代表动量，电场等任意矢量，然而一个特别重要的量是原点到点（x_1，y_1，z_1）的位移，用特殊符号$\boldsymbol{r}$来代表。于是表示位移，可以用矢量$\boldsymbol{r}$或者它的尖端的坐标（x_1，y_1，z_1）来表示。

$$\boldsymbol{r}=(x_1,\ y_1,\ z_1) \tag{1.3}$$

用r代表矢量$\boldsymbol{r}$的大小时，根据图1.5可知尖端的坐标与r

●在笛卡儿坐标系里虽从任何一点出发都行，这里为简单起见，假定从原点出发。

有下列关系。

$$x_1 = r\cos\alpha,\ \ y_1 = r\cos\beta,\ \ z_1 = r\cos\gamma \tag{1.4}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 叫做方向余弦，α 是所研究的矢量与 x 轴正方向之间的夹角，β, γ 可类推，x_1, y_1, z_1 叫做 $\boldsymbol{r}$ 的分量或 $\boldsymbol{r}$ 的投影。

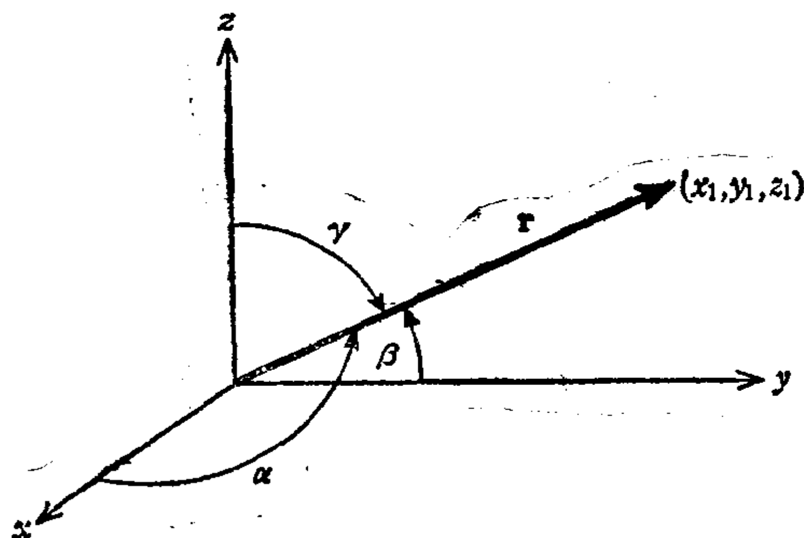


图 1.5 方向余弦

把上述想法再推进一步时，任意矢量$\boldsymbol{A}$分解成它的分量（或在坐标轴上的投影）

$$A_x = A\cos\alpha \tag{1.5}$$

α 是 $\boldsymbol{A}$ 和 x 轴正方向之间的夹角，用一个字 $\boldsymbol{A}$ 可以代表矢量或者用它的分量（A_x, A_y, A_z）也无妨。其中 A_x 的下标 x 意味着 x 分量，须注意并不依赖于变量 x。如果 A_x 是x, y, z 的函数时，才记作 A_x（x, y, z）。

这里，为方便起见引入沿各坐标轴的单位矢量。令 $\boldsymbol{i}$ 为指向 x 轴的正方向，大小为 1 的矢量，$\boldsymbol{j}$为指向 y 轴正方向，大小为 1 的矢量，$\boldsymbol{k}$ 为指向 z 轴正方向大小为 1 的矢量。于是 $\boldsymbol{i}A_x$ 是大小为 A_x，指向 x 轴正方向的矢量。由矢量的加法得到的

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}A_x+\boldsymbol{j}A_y+\boldsymbol{k}A_z \tag{1.6}$$

意味着矢量$\boldsymbol{A}$等于它分量的矢量和。若矢量为 0 时，则$\boldsymbol{A}$的各分量必须都是 0。即，如果

$$\boldsymbol{A}=0 \quad 则 A_x=A_y=A_z=0$$

最后利用勾股弦定理，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小为

$$A=(A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2)^{1/2} \tag{1.7a}$$

在第 2 章会看到，可以按照各种坐标系的不同情况，把矢量进行分解。

方程（1.6）规定由三个基矢$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$组成实际的三维空间。即一定大小的任意矢量可以用$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$的线性组合来表示。由于$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$是线性独立的（任何一个都不能用其它两个的线性组合来表示），所以这三个矢量构成实三维空间的基底。代替用图解法求解矢量的加法与减法，可以用它的分量来做。按

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}A_x+\boldsymbol{j}A_y+\boldsymbol{k}A_z 与 \boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}B_x+\boldsymbol{j}B_y+\boldsymbol{k}B_z$$

有$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}(A_x\pm B_x)+\boldsymbol{j}(A_y\pm B_y)+\boldsymbol{k}(A_z\pm B_z)$ （1.7b）

例题 1.1.1 对于

$$\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$

利用方程（1.7b），可得

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=8\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$$

习　题

1.1.1 给定 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 时，试问如何求 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$？

1.1.2 已知大小为 10 的矢量 $\boldsymbol{A}$ 与各坐标轴的夹角都相等时，试求A_x，A_y，A_z。

1.1.3 试计算在 xy 平面上，与 x 及 y 轴的正方向之间的夹角相等的单位矢量的分量。

1.1.4 矢量方程可用 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 的形式来表示，从这一事实出发，试证明一个矢量方程与三个标量方程是等效的（把牛顿第二定律 $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}=m\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ 当作一个矢量方程时，这意味着 a_x 只由 F_x 来决定，而与 F_y，F_z 是无关的）。

1.1.5 令三角形的顶点 A，B，C 分别为点（-1，0，2），（0，1，0），（1，-1，0）. 试求图形 $ABCD$ 成为平行四边形的 D 点。

答（2，0，-2）

1.1.6 由原点出发的三个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 的顶点作成一个三角形. 由该三角形的各边得到的矢量和（$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{CA}$）等于 0，请用 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 表示之。

1.1.7 有中心处于 $\boldsymbol{r}_1$ 半径为 a 的球。

(a) 写出代表这个球的代数方程。

(b) 写出代表这个球的矢量方程。

答 (a) $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=a^2$

(b) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}$

（$\boldsymbol{a}$的大小虽是a，但认为指向可以取所有方向）。

1.1.8 由三个相互垂直的平面镜组成反射镜. 试证明入射于这个反射镜的光线（入射时要保证能在三个平面镜上发生反射）沿着平行于入射方向而反射出去。

提示：就代表光线进行方向的矢量的分量来考虑反射效果。

1.2 坐标的旋转

在上一节用两个等效的方法定义了矢量. 一个是作为决定大小与方向的箭头的方法，另一个是用分量来表示的方法. 在这一节采用第三种方法，根据使坐标系旋转时各分量

的行为来定义矢量的一种方法。

在物理学进一步发展阶段，再把矢量作为具有大小和方向的量来定义的方法已显得不够。一方面，我们经常见到象各向异性晶体的弹性模量或折射率那样，虽具有大小和方向，但并不是矢量的量。另一方面，这种朴素的方法要进行推广定义更复杂的量的话就会带来不便。于是以位移矢量的方法来弄清矢量的新定义。

展开新方法有着重要的物理基础。即用数学描述现实世界时，我们所建立的定义以及由它得到的结果都不应以数学分析方法为转移。有些人喜欢把物理系统比作大厦，而把数学分析比作建设大厦的脚手架。最后随着大厦的建成脚手架也就拆除了。

我们考虑空间是各向同性的情况。即不存在什么特殊方向，所有方向都是等同的。在这种情况下，被分析的物理系统或推导出的物理定律，应不依赖于我们对坐标系的取法。

再把矢量是不依赖于坐标系的几何对象的想法进一步展开。在两个不同的坐标系(一个系是从另一个系的旋转而得)里来考虑 $\boldsymbol{r}$。

为简单起见，先考虑两维情况。将坐标系(x, y)沿逆时针方向旋转角度 φ。但 $\boldsymbol{r}$ 不动。这时，在原有坐标系里 $\boldsymbol{r}$ 的分量（不带撇的）与在旋转后的新坐标系（带撇的）里的分量之间，有下列关系式

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \qquad (1.8)$$

在1.1节已经看到矢量也能用点的坐标来表示。即点的坐标与矢量的分量成正比。从此可知，矢量的分量在坐标系的旋转当中，必须象 $\boldsymbol{r}$ 那样和一点的坐标进行相同的变换。若在xy-坐标系里任意一组量（A_x, A_y）通过坐标系的旋转

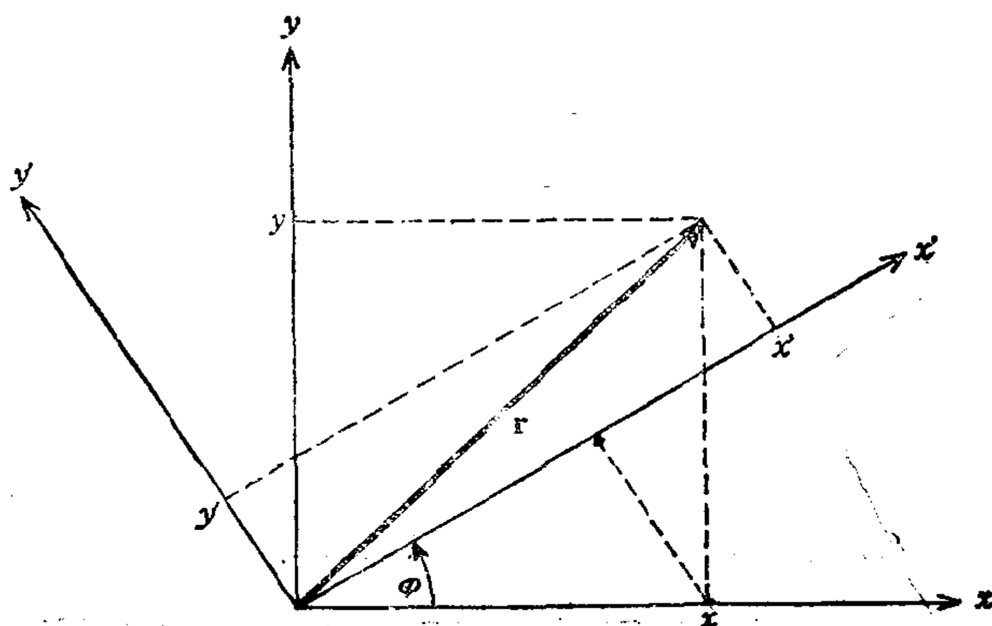


图 1.6 笛卡儿坐标系的旋转

而变换到由（1.9）所规定的（A'_x, A'_y）时，A_x 与 A_y 确定矢量$\boldsymbol{A}$的分量●。

$$A'_x = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi$$
$$A'_y = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi \qquad (1.9a)$$

于是，矢量在坐标系的旋转当中，可以通过该分量的变换性质来加以定义。如果对 A_x 与 A_y 和二维位移矢量的分量x与y进行相同的变换时，它们就是矢量的分量。在坐标系的旋转当中，A_x 与 A_y 不具有这种变换性时，则它们不是矢量。

为了完善这个定义，必须弄清在(1.9)里的 A'_x 与 A'_y 的意义。令矢量$\boldsymbol{A}$的分量是坐标与其它常矢量 $\boldsymbol{c}$ 的函数。

$$A_x = A_x(x,\ y,\ c_x,\ c_y)$$
$$A_y = A_y(x,\ y,\ c_x,\ c_y) \qquad (1.9b)$$

在旋转后的坐标系里，$\boldsymbol{A}$具有分量A'_x, A'_y，它们也是位置坐标（旋转后的坐标系里）与$\boldsymbol{c}$的函数，所以有

●与此相对应，标量的定义是 $S'=S$，即在坐标系的旋转当中保持不变。

$$A'_x = A'_x(x', y', c'_x, c'_y)$$

$$A'_y = A'_y(x', y', c'_x, c'_y) \tag{1.9c}$$

利用(1.8)时，用 x, y, c_x, c_y 与旋转角 φ 能够表示(1.9b)中的 x', y', c'_x, c'_y。因坐标系都是等效的，所以 A'_x 与 A'_y 对 x', y', c'_x, c'_y 的依赖性与在原有坐标系里 A_x, A_y, 对 x, y, c_x, c_y 的依赖性必须一样。

在 $\varphi = 0$ 的特殊情况下，有 $x = x'$, $y = y'$。很明显

$$A_x = A'_x,$$

$$A_y = A'_y.$$

如此 A'_x 依赖于 x', y', c'_x, c'_y 的函数形式与表示 A_x 对 x, y, c_x, c_y 的依赖性的函数形式相同。对 A'_y 来讲也和 A_y 有相同的关系。

满足定义式（1.9）的矢量的分量 A_x 与 A_y，和空间各点矢量的大小 A 与方向结合在一起。A 的大小是标量，对坐标系旋转是不变的。同样，方向（在原坐标系进行测量）对坐标系的旋转也是不变的（请看习题 1.2.6）。结果随着坐标系的旋转矢量的分量是变的。这也就是式（1.9)的涵意。但旋转坐标系的分量 A'_x, A'_y 随着旋转虽发生变化，可是它们和 A_x 与 A_y 作成的矢量大小相同，而且对 x, y 轴来讲给出具有相同方向的矢量。

例 1.2.1

试证明一组量（$-y$, x）是二维矢量的分量。

要回答这些量是否是矢量的分量的问题，根据定义要依它们的变换性质而定，因此就得分析它们如何变换。利用 $V_x = -y$, $V_y = x$，让

$$V'_x = -y\cos\varphi + x\sin\varphi$$

$$V'_y = y\sin\varphi + x\cos\varphi \tag{1.10}$$

如上所述，因 V'_x 依赖于 x', y' 的函数形式和 V_x 依赖于 x, y

的函数形式相同，故有

$$V_x = -y'$$
$$V_y = x' \tag{1.11}$$

不难看出，利用（1.8）从（1.11）去掉带撇的变量时就会得到（1.10）。并满足二维矢量的定义式（1.9），因此$(-y, x)$是矢量的分量。

例题 1.2.2

根据定义作为不是矢量的一个例子，考虑$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{i}x-\boldsymbol{j}y=(x, -y)$，要研究它的变换性质时，利用（1.9），得

$$V_x' = x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$V_y' = -y' = -x\sin\varphi - y\cos\varphi$$

很明显这些式子和（1.8）是不能同时成立的。因满足不了（1.9），所以$(x, -y)$不是矢量的分量。

许多著者喜欢把满足（1.9）的关系的A_x与A_y叫做（二维）矢量场的分量。象$\boldsymbol{i}$与$\boldsymbol{j}$那样的常矢量和矢量场是有区别的。这些常矢量不能这样变换使用，$\boldsymbol{i}$依赖于x，y的函数形式和$\boldsymbol{i}'$依赖于x'与y'的函数形式相同。实际上，$\boldsymbol{i}$不是x与y的函数而是常数。在习题1.2.1里仍有常矢量的讨论。

为了推广到三维或四维，利用更简洁的符号更为方便。于是

$$x \to x_1$$
$$y \to x_2$$
$$a_{11} = \cos\varphi, \quad a_{12} = \sin\varphi$$
$$a_{21} = -\sin\varphi, \quad a_{22} = \cos\varphi \tag{1.12}$$

由于式（1.8）可以表示成

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \tag{1.13}$$

系数a_{ij}是x_i'与x_j轴之间的夹角的余弦即方向余弦。

$$a_{12} = \cos(x_1', \ x_2) = \sin\varphi$$

$$a_{21} = \cos(x_2', \ x_1) = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi.$$

新符号[1]的优点是，利用求和符号$\sum$可把（1.13）写成

$$x_i' = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ 2 \tag{1.14}$$

在这个式子里 i 是给定各方程的参数。在第 1 个式子里 $i=1$，在第 2 个式子里 $i=2$.下标 j 是求和指数，和积分变量一样不妨用其它符号替换。

向三维，四维甚至N 维的推广是非常简单的。只有满足下式时才能说，N个量 V_j 的组合才是N维矢量$\boldsymbol{V}$的分量，即在旋转后的坐标系里的值 V_i' 由

$$V_i' = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} V_j, \quad i = 1, \ 2, \ \cdots, \ N \tag{1.15}$$

确定的情形和前面一样，a_{ij} 是 x_i'与x_j 之间的夹角的余弦。以后在许多情况下，对 j 求和的上限N 和 i 的变化范围不再明显标出。当然根据问题的性质认为读者会知道空间是几维的。

根据 a_{ij} 的定义它是正方向的 x_i' 轴和正方向的 x_j 轴之间的夹角的余弦，在笛卡儿坐标系[2]里可写成

---

[1] 读者对于用一个参数 φ 代替四个参数a_{ij}可能产生疑团.很明显a_{ij}不能组成数目最大的参数．在二维里，四个 a_{ij} 必须满足由（1.18）所规定的三个条件．对方向余弦来讲，增加这些多余的东西，为以后带来许多方便．到了第3，4章，对这些方便之处会更有体会．对三维旋转来讲（9 个 a_{ij} 只有三个是独立的），如下各种描述方法（1）4.3 节的欧拉角，（2）四元数，（3）凯利·克莱因的参数．这些方法各有优缺点．

[2] 试用x_j将$x_i' = \Sigma a_{ik} x_k$微分之．再接着（1.21）进行讨论．

$$a_{ij}=\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}=\frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \tag{1.16}$$

须注意这是偏微分。利用（1.16），则（1.15）变成

$$V_i=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}V_j=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}V_j \tag{1.17}$$

方向余弦 a_{ij} 满足正交条件

$$\sum_i a_{ij}a_{ik}=\delta_{jk} \tag{1.18}$$

或

$$\sum_i a_{ji}a_{ki}=\delta_{jk} \tag{1.19}$$

符号 δ_{jk} 是 Kronecker 符号，由

$$\begin{aligned}&\delta_{jk}=1\quad(j=k\text{时})\\&\delta_{jk}=0\quad(j\neq k\text{时})\end{aligned} \tag{1.20}$$

给出把由（1.12）式确定的 a_{ij} 的值代入（1.18）和(1.19)就可以简单地肯定（1.18）和（1.19）在二维情况下是成立的.不为 0 的情形的结果成为众所周知的 $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$。要在普遍情况下肯定（1.18），利用（1.16）的偏微分形式，可得

$$\sum_i\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}\frac{\partial x_k}{\partial x_i'}=\sum_i\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i'}{\partial x_k}=\frac{\partial x_j}{\partial x_k} \tag{1.21}$$

最后的关系是把 x_j 作为 x_1', $x_2'\cdots$ 的函数根据一般偏微分公式就可以得到。最后结果的 $\partial x_j/\partial x_k$ 当 $j\neq k$时 x_j 与 x_k 是正交的，所以等于 δ_{jk}。当 $j=k$ 时，很明显偏微分的值等于1。

用分量在坐标系旋转当中如何变换来定义矢量时，强调以下两点是有必要的。

1. 这个定义对于描述我们的物理世界是有用的，而且很合适。我们所用的矢量方程不依赖于各坐标系（坐标系也

不一定必须是笛卡儿坐标系）．矢量方程虽总是可以用任意坐标系来表示，但为了得到数值结果，最终还是有必要用特定坐标系来表示方程。

2．这个定义可以推广到一般定义，这个一般定义可通用于第 3 章的张量分析而闻名的数学领域中。

用途也是齐全的，根据坐标系旋转的矢量分量的表现，在 1.3 节里为了证明标量积是标量，在 1.4 节里为了证明矢量积是矢量，在 1.5 节里表示标量的梯度，$\nabla\varphi$ 是矢量都要用到．在这一章的最后，把 1.1 节所给定的矢量用了用处更广的定义．这样做和线性代数里的矢量或矢量空间（线性空间）的内容并不矛盾．到目前为止在这里所谓矢量，可以相加，可以乘上数（标量），能用于三个矢量分量，多项式，函数等．它们的集合叫做矢量空间或线性空间，不仅限于二维或三维可以是 n 维的，也有无穷维的情形．这个矢量可以是实数的也可以是复数的．在许多现代量子理论里使用无穷维的矢量空间（希尔柏特空间）．于是作为单位矢量，正交化函数会起作用．傅里叶级数是这种矢量空间的一个例子。

习　题

1.2.1 有分量为 $V_x=1$，$V_y=0$ 的常矢量 $\boldsymbol{V}$，在旋转后的坐标系里 $\boldsymbol{V}$ 的分量为

$$V'_x=\cos\varphi$$

$$V'_y=-\sin\varphi$$

试从矢量变换法则出发证明上式。

φ-依赖性是明显的．由于常矢量的引进，在空间里就已设置了一个选定的方向．$\boldsymbol{V}$ 是 1.1 节意义下的矢

量，由于它的有用性也得承认它是矢量。

1.2.2 试肯定下列各情形，是否满足矢量变换法则(1.15)。

(a) 对于 $(x-y,\ x+y,\ 0)$ 围绕 z 轴的旋转，

(b) 对于 $(0,\ 2z+y,\ z-2y)$ 围绕 x 轴的旋转，

(c) 对于 $(y^2+z^2,\ -xy,\ -xz)$ 分别围绕三个轴的旋转。

1.2.3 (a) 证明 $(xyc_x+y^2c_y,\ -x^2c_x-xyc_y)$ 作成矢量。量c_x，c_y是常矢量 $\boldsymbol{c}$ 的分量。

(b) 试肯定 $(xyc_x-x^2c_y,\ y^2c_x-xyc_y)$ 也照样如此。

1.2.4 二维矢量$\boldsymbol{V}$具有 $(ax+by,\ cx+dy)$ 的形式。其中a，b，c，d是常数，试证明$\boldsymbol{V}$是径矢$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y$和切矢$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}y-\boldsymbol{j}x$ 的线性组合。

$$\boldsymbol{V}=a\boldsymbol{r}+b\boldsymbol{t}$$

提示：矢量的变换法则必须 (a) 对任何角度 (b) 在所有的点 $(x,\ y)$ 都成立。

1.2.5 试证明正交条件$\sum\limits_i a_{ji}a_{ki}=\delta_{jk}$，这个条件的特殊情况是，1.1 节的方向余弦满足下列关系。

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

这从 (1.7a) 也可以推导出来。

1.2.6 (a) 试证明，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小 $A=(A_x^2+A_y^2)^{1/2}$ 与旋转坐标系的方向无关，即

$$(A_x^2+A_y^2)^{1/2}=(A_x'^2+A_y'^2)^{1/2}$$

与旋转角φ无关。与这个角度无关表明 $\boldsymbol{A}$ 对于旋转是不变的。

(b) 在一点 $(x,\ y)$，$\boldsymbol{A}$ 规定了和x轴正方向之间的夹角α以及和 x'轴正方向之间的夹角α'。x 轴到 x'

轴的角度为 φ。试证明，用在旋转后坐标系里的分量来表示的方向和用原来坐标系里的分量来表示的方向是一样的，也就是意味着 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$，即

$$\alpha'=\alpha-\varphi$$

1.3 标量积（内积）

已经定义了矢量，然后要把它们进一步结合起来。把矢量结合起来的法则必须保证数学上的连贯性。具有这种首尾一贯性的可能情形当中，考虑两个在数学上，物理上很有趣的情形。而第三种可能情形是在第 3 章里要讨论的张量。

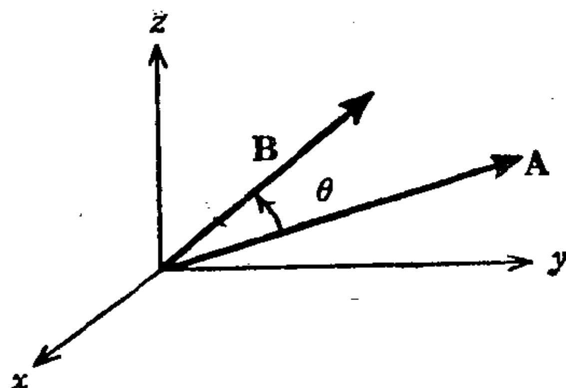


图 1.7 标量积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta$

在物理学里经常出现所谓 $AB\cos\theta$ 的结合形式。其中 A 与 B 是两个矢量的大小，θ 是矢量间的夹角。比如

$$功=力\times位移\times\cos\theta$$

通常认为是投影到位移方向上的力的分量乘以位移。

考虑这种应用例，把

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=\sum_i A_iB_i \qquad (1.22a)$$

叫做 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标量积，或内积。根据这个定义可知，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$。

基矢 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 满足下列关系

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1 \qquad (1.22b)$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$$

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0 \qquad (1.22c)$$

旋转坐标轴，使 $\boldsymbol{A}$ 为新的 x 轴时❸，

$$A_x = A,\quad A_y = 0\quad A_z = 0$$

$$B_x = B\cos\theta$$

于是根据（1.22）有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta \tag{1.23}$$

把这个作为标量积的第 2 种定义。根据这一定义可知功是力与位移的标量积。

例题 1.3.1

就例题 1.1.1 的两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{A} = 6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$）来讲，由（1.22）能得到

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (12 - 12 - 9) = -9$$

在这种情况下 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 方向的投影（或 $\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 方向的投影）是负的，实际上，有

$$|\boldsymbol{A}| = (36 + 16 + 9)^{1/2} = (61)^{1/2} = 7.81$$

$$|\boldsymbol{B}| = (4 + 9 + 9)^{1/2} = (22)^{1/2} = 4.69$$

有 $\cos\theta = -0.246,\quad \theta = 104.2°$。

如果 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ 而且 $\boldsymbol{A} \neq 0$，$\boldsymbol{B} \neq 0$ 时，根据（1.23）则有 $\cos\theta = 0$ 或 $\theta = 90°$，$270°$，……。即矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必须是相互垂直的。也可以说 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是正交的。当然基矢 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是相互正交的。为了把这种正交性的想法再深入一步，考虑 $\boldsymbol{n}$ 是单位矢量，$\boldsymbol{r}$ 是 xy-平面内不为零的矢量，即 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y$ 的情形，如果对于所有的 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y$，有

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} = 0$$

时，则 $\boldsymbol{n}$ 必须与 xy-平面相垂直（正交）。

到目前为止还没有证明使用标量这个词是否恰当，也就是说标量积是否就是真正的标量。要进行这一证明，就得研

---

❸对于坐标系的旋转，A、B是不变的，留到这一节的后面去证明。

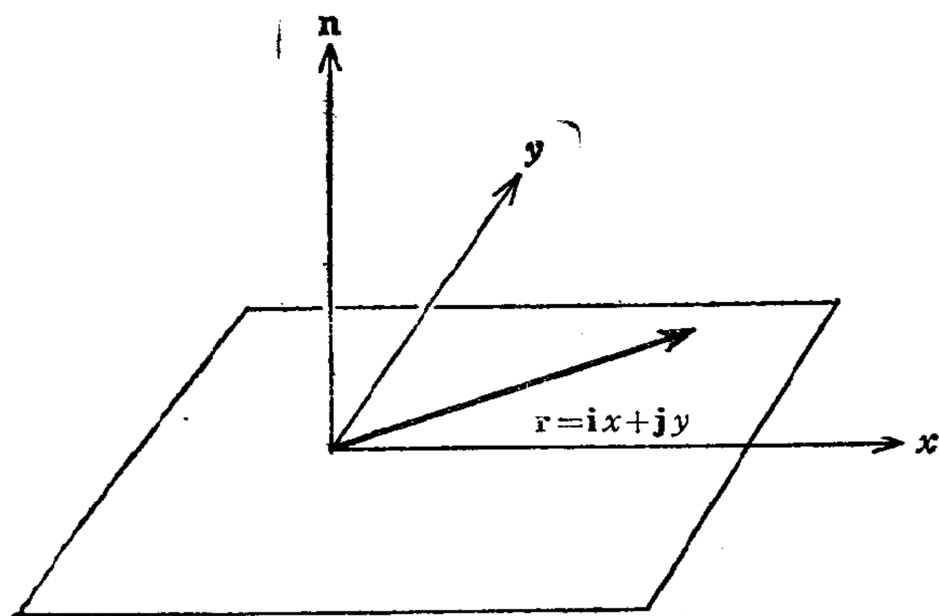


图 1.8 法线矢量

究在坐标系旋转当中$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$的表现，利用（1.15），

$$A_x'B_x' + A_y'B_y' + A_z'B_z' = \sum_i a_{xi}A_i \sum_j a_{xj}B_j + \sum_i a_{yi}A_i \sum_j a_{yj}B_j + \sum_i a_{zi}A_i \sum_j a_{zj}B_j \tag{1.24}$$

为按 x，y，z 求和，使用角标 k 与 l，得

$$\sum_k A_k'B_k' = \sum_l \sum_i \sum_j a_{li}A_i a_{lj}B_j \tag{1.25}$$

重新排列右边的项，有

$$\sum_k A_k'B_k' = \sum_i \sum_j \sum_l (a_{li}a_{lj})A_iB_j = \sum_i \sum_j \delta_{ij}A_iB_j = \sum_i A_iB_i \tag{1.26}$$

(1.26) 当中后面两个式子的推导，利用了 (1.18) 的方向余弦的正交条件与 (1.20) 的 Kronecker 的 δ 的效果。Kronecker 的 δ 的效果是把角标相等的项以外所有的项从求和中去掉。在 (1.26) 里，其效果是取 $j=i$ 时，对 j 的求和去掉。取 $i=j$ 时对 i 的求和去掉，根据 (1.26) 有

$$\sum_k A_k' B_k' = \sum_i A_i B_i \tag{1.27}$$

这正是标量的定义，即在坐标系的旋转下保持不变。为了使用这种利用所谓不变的想法的类似方法，考虑与 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 及其本身的标量积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C} &= (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\\ &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C} = C^2 \tag{1.29}$$

因 $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}=C^2$ 是矢量 $\boldsymbol{C}$ 的大小的平方，所以是不变量。因此可知

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(C^2-A^2-B^2) \tag{1.30}$$

是不变的。

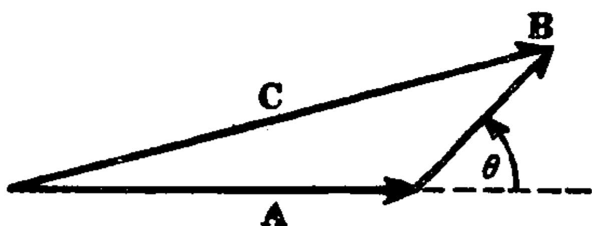


图 1.9 余弦定理

因 (1.30) 的右边是不变的，即标量，所以左边的 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 在坐标系旋转下也必须不变。从此可知 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 是标量。

(1.28)是余弦定理

$$C^2 = A^2+B^2+2AB\cos\theta \tag{1.31}$$

的另一表现。通过使(1.31)和 (1.28) 对比，可得到(1.23)的另一证明，相反也可以看成是用矢量推导余弦定理。

说明标量积的几何意义的一个有趣例子是在广义相对论里，考虑 x，y，z，w 的四维空间球。

$$x^2+y^2+z^2+w^2=1$$

这个四维球的表面由满足所谓 $|\boldsymbol{r}|=1$ 的条件的矢量 $\boldsymbol{r}=(x, y, z, w)$ 来表示。在这个四维球的总表面上能够作出切于这个球的单位矢量 $\boldsymbol{t}$。作为一个可能的例子，有

$$\boldsymbol{t}=(y,\ -x,\ w,\ -z)$$

读者不难肯定，遍及总表面 $\boldsymbol{t}$ 为

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=1$$

所以大小是1，由于

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{r}=0$$

结论是相切的。

在二维里存在着类似的结果（例题1.2.1），可是三维没有类似结果。从球上出来的毛发并不都能梳光。额上面的立发就是如此。

由（1.22）规定的标量积，可向两个方向推广，没有必要把空间限制到三维。在 n 维空间里，（1.22）适用于从1到 n 求和。如果求和是收敛的无穷级数时，n 取无穷的也是可以的。其它推广是在矢量当中包含函数。也可以考虑关于函数的标量积。

习　题

1.3.1 试问下列矢量间夹角的余弦是多少？

$$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

答 $\cos\theta=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

1.3.2 两个大小为 1 的矢量 $\mathbf{a}_i$ 与 $\mathbf{a}_j$ 是平行的或相互垂直。试推导出（1.18）是表示方向余弦的正交关系。

1.3.3 试证明（1）基矢和它本身的标量积是1，（2）这个关系在所有旋转坐标系里都正确，利用这一事实，则$\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j}'=0$意味着$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$。但$\boldsymbol{i}'$是在围绕原来坐标系的$z$轴旋转 45°后的坐标系里的基矢。

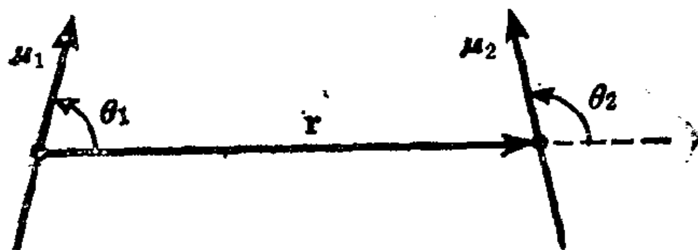
1.3.4 从原点引出的矢量$\boldsymbol{r}$的尖端在（x，y，z），或$\boldsymbol{r}$在空间里指定一点（x，y，z），试问由满足下式$\boldsymbol{r}$所描述的表面如何

（a） $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0$，

（b） $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{r}=0$。

其中矢量$\boldsymbol{a}$是常矢量（大小和方向都一定）。

1.3.5 偶极矩为$\boldsymbol{\mu}_1$和$\boldsymbol{\mu}_2$的两个偶极子间的相互作用能，用



矢量形式可写成

$$V=-\frac{\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2}{r^3}+\frac{3(\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\mu}_2\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}$$

用标量形式可写成

$$V=\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}(2\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi)$$

其中θ_1与θ_2分别为$\boldsymbol{\mu}_1$与$\boldsymbol{\mu}_2$对$\boldsymbol{r}$的夹角，φ是$\boldsymbol{\mu}_2$对$\boldsymbol{\mu}_1$与$\boldsymbol{r}$所组成的平面之间的夹角。试证明这两种V的表示是等同的。

1.4 矢量积（外积）

矢量乘法的第2种形式是，用角度的正弦代替余弦。比如物体的角动量是

$$\text{角动量} = \text{臂长} \times \text{动量}$$
$$= \text{距离} \times \text{动量} \times \sin\theta$$

为了便于处理有关角动量，转矩，角速度等有关问题，把矢量积或外积定义为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B},$$
$$C = AB\sin\theta.$$

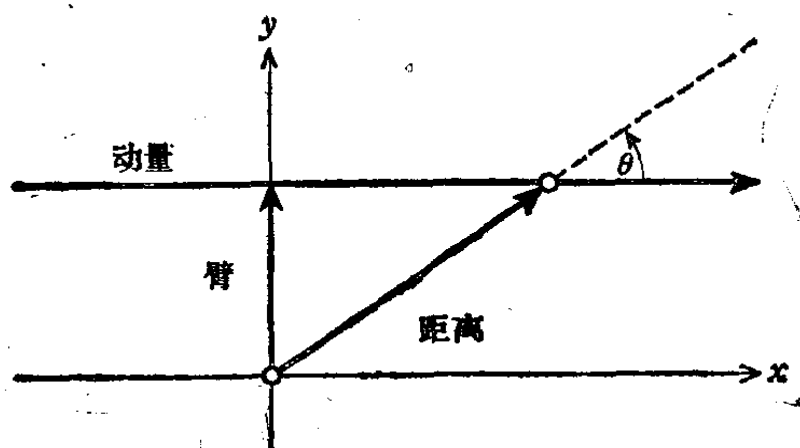


图 1.10 角动量

和前面的标量积不同，现在 $\boldsymbol{C}$ 是矢量。$\boldsymbol{C}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 所组成的平面。$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 的指向取右手系。方向的取法成立反对易关系

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \tag{1.32a}$$

根据这个外积的定义，可得

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0 \tag{1.32b}$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j} \tag{1.32c}$$

大家熟习的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，通常按矢量积形式的力方

程●来加以定义

$$\boldsymbol{F}_M = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是 q 的速度，$\boldsymbol{F}_M$ 是作用于运动电荷的力。外积具有在以下几节使用的一个重要几何意义。在用 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 确定的平行四边形（图1.11）当中，把 A 作为底边长度时则 $B\sin\theta$

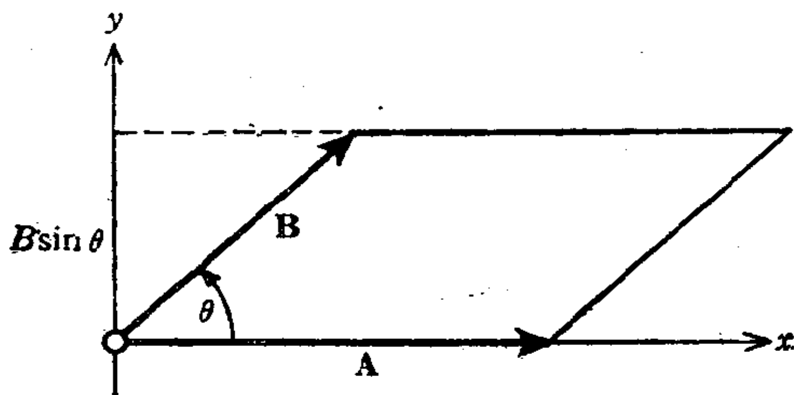


图 1.11　用平行四边形表示矢量积

代表高度。于是 $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = AB\sin\theta$ 是这个平行四边形的面积。作为矢量来看，则 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 所确定的平行四边形的面积为大小，并在方向上垂直于平行四边形平面的面积矢量。补充些说明的话，那就是把（1.32c）与（1.32b）变形的式子会成为展开四元数数学的出发点。所谓变形式子是 $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = -1$。

作为矢量积 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 的定义，有确定$\boldsymbol{C}$的分量的方法。

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\ C_y &= A_z B_x - A_x B_z \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x \end{aligned} \qquad (1.33)$$

或　$C_i = A_j B_k - A_k B_j$，（i，j，k 彼此不相等）　（1.34）

这是能循环交换角标 i，j，k 的式子。矢量积也能用行列式恰当地表示出来●。

●这里认为电场$E=0$。

●有关行列式请参考4.1节。

$$\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.35}$$

按第1行展开行列式时能得到在（1.33）的 $\boldsymbol{C}$ 的三个分量。

例题 1.4.1

对于在例题1.1.1里给定的矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$

来讲

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 6 & 4 & 3\\ 2 & -3 & -3\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{i}(-12+9)-\boldsymbol{j}(-18-6)+\boldsymbol{k}(-18-8)$$

$$=-3\boldsymbol{i}+24\boldsymbol{j}-26\boldsymbol{k}.$$

为了证明（1.32）式与通过分量定义（1.33）是等同的，利用（1.33）来计算 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=A_x(A_yB_z-A_zB_y)\\&+A_y(A_zB_x-A_xB_z)\\&+A_z(A_xB_y-A_yB_x)=0\end{aligned} \tag{1.36}$$

同理

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0 \tag{1.37}$$

在（1.36）与（1.37）里 $\boldsymbol{C}$ 既垂直于 $\boldsymbol{A}$ 也垂直于 $\boldsymbol{B}$（$\cos\theta=0$，$\theta=\pm 90°$），这表明它垂直于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 所组成的平面。在基矢的特殊情况下，考虑 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$（$C_z=+A_xB_y$）可以确定正向。

大小可由

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=A^2B^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2\\&=A^2B^2-A^2B^2\cos^2\theta\\&=A^2B^2\sin^2\theta\end{aligned} \tag{1.38}$$

故有 $C = AB\sin\theta$ (1.39)

$A \times B$利用（1.33），内积利用（1.22），都用分量表示之，就不难看清楚（1.22）的第1个式子。根据（1.36），（1.37），（1.39）容易知道矢量积的第2个定义（1.32）与（1.33）是等同的。

另外遗留的问题是，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 实际上是否是矢量，即它是否满足矢量变换法则（1.15）。变换旋转后坐标系（带撇的）的矢量，可得

$$C_i' = A_j'B_k' - A_k'B_j', \quad (i,\ j,\ k\ \text{按循环次序})$$

$$= \sum_l a_{jl}A_l \sum_m a_{km}B_m - \sum_l a_{kl}A_l \sum_m a_{jm}B_m \tag{1.40}$$

$$= \sum_{l,m} (a_{jl}a_{km} - a_{kl}a_{jm})A_lB_m$$

当$m = l$时括弧内方向余弦的式子变成0，一旦确定了i就能确定j与k，对于l与m有6个组合。令$i = 3$时则$j = 1, k = 2$（循环次序），方向余弦有下列组合。

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} &= a_{33} \\ a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11} &= a_{32} \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} &= a_{31} \end{aligned} \tag{1.41}$$

以及把它们的符号改变以后。（1.41）是方向余弦所满足的恒等式。利用行列式与矩阵可以肯定这些恒等式（参考习题4.3.3）。将（1.41）代入（1.40）

$$\begin{aligned} C_3' &= a_{33}A_1B_2 + a_{32}A_3B_1 + a_{31}A_2B_3 \\ &\quad - a_{33}A_2B_1 - a_{32}A_1B_3 - a_{31}A_3B_2 \\ &= a_{31}C_1 + a_{32}C_2 + a_{33}C_3 \\ &= \sum_n a_{3n}C_n \end{aligned} \tag{1.42}$$

交换角标对C_1'与C_2'来讲也能得到同样的式子，因此能够满

足（1.15）立刻可以看出实际上 $\boldsymbol{C}$ 是矢量．这里要指出，外积的这种矢量性质，是由于空间是三维的而偶然发生的❶．到第3章里会知道，外积也可以作为二阶反对称张量来处理．

矢量乘法已经介绍了两种方法．第3种将在第3章出现．然而矢量的除法究竟如何，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的比，$\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$ 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不是平行的就不能唯一的确定（习题4.2.19），看来不能定义矢量除以其它矢量．

习　　题

1.4.1 两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 由

$$\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$$

确定．试计算它们的标量积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 与矢量积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$．

1.4.2 证明下列各式

(a)　$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = A^2 - B^2$

(b)　$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = 2\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

这必须要用分配律

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$$
$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$$

只要在笛卡儿坐标系里用分量进行展开的话，是不难证明的．

1.4.3 给定三个矢量

$$\boldsymbol{P} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{Q} = -6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

---

❶尤其是（1.41）只在三维空间里成立．在7维空间 R^7 虽有可能人为地定义外积，可是该外积只有病态的性质．

试找出处于垂直关系，平行关系以及反平行关系者。

1.4.4 利用下列矢量

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta$$

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{i}\cos\varphi-\boldsymbol{j}\sin\varphi$$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{i}\cos\varphi+\boldsymbol{j}\sin\varphi$$

试证明熟知的有关三角函数的恒等式

$$\sin(\theta+\varphi)=\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi$$

$$\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi$$

1.4.5 (a) 试求出垂直于下列 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 的矢量 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{U}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

(b) 除了这个条件，再让大小为 1 时则 $\boldsymbol{A}$ 会如何。

1.4.6 试证明 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 都在同一平面内时

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=0$$

提示：考虑外积的矢量方向.

1.4.7 三角形的三个顶点的坐标是（2，1，5，），（5，2，8），（4，8，2）时，试利用矢量的方法来计算面积。

1.4.8 平行四边形的顶点 A，B，C，D 的坐标分别是（1，0，0），（2，－1，0），（0，－1，1），（－1，0，1）．试求三角形 ABC 与 BCD 的面积矢量。两个面积矢量相等吗？

答对 ABC 来讲是 $-1/2\ (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$

1.4.9 从原点出发的三个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 与原点一起组成四面体。试计算这个四面体的四个面积矢量。但假设由四面体向外的方向为正。

注）这个结果在 1.11 节能推广到任意的封闭曲面。

1.4.10 试求出由下列三个矢量所确定的球面三角形 ABC（图 1.12）的边的长度与角度。

$$\boldsymbol{A}=(1,\ 0,\ 0)$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boldsymbol{C}=\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

（各矢量从原点出发）

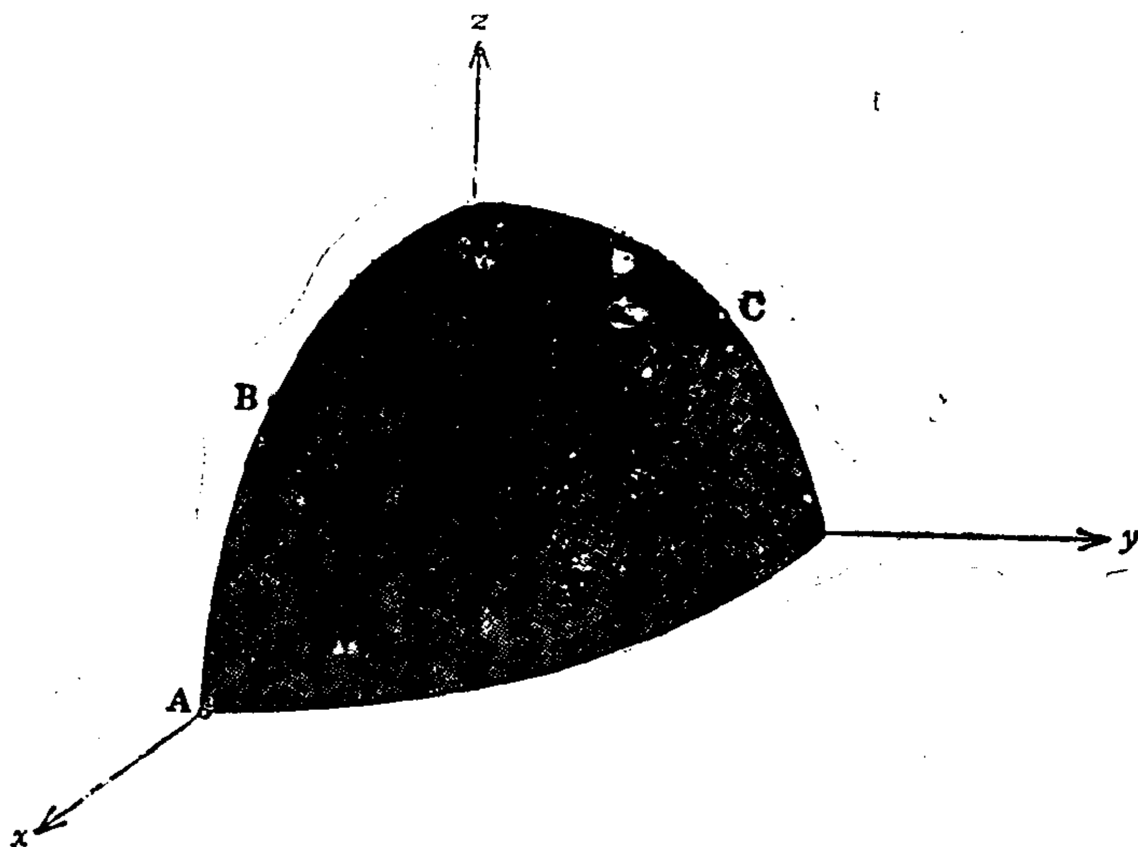


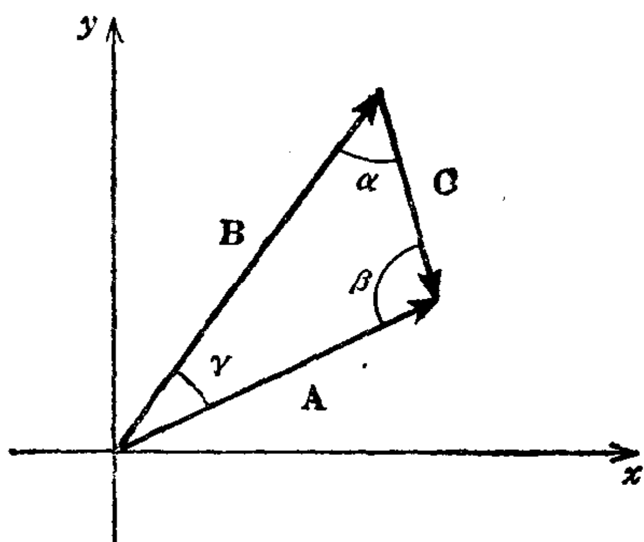
图 1.12　球面三角形

1.4.11 试推导正弦法则

$$\frac{\sin\alpha}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{\sin\beta}{|\boldsymbol{B}|}=\frac{\sin\gamma}{|\boldsymbol{C}|}$$

1.4.12 根据洛仑兹力公式

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$



可定义磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。做三个实验，得到对应各个 $\boldsymbol{v}$ 值的力 $\boldsymbol{F}$ 的值

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i},\quad \frac{\boldsymbol{F}}{q}=2\boldsymbol{k}-4\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{j},\quad \frac{\boldsymbol{F}}{q}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{k},\quad \frac{\boldsymbol{F}}{q}=\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{i}$$

试分别利用这三个实验的各结果，计算磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的值。

1.5 标量三重积与矢量三重积

在1.3节和1.4节讨论了两种有趣的矢量乘法。还有三个矢量的结合，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 和$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。由于它们经常出现，当然引人注意，人们知道

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$$

是标量三重积。$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 虽是矢量但和 $\boldsymbol{A}$ 的内积却是标量。$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$是标量与矢量的外积，这是到目前为止还没有定义的。如果把这种未定义的不算在内时，那么去掉标量三重积的括弧，写成$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$也无妨。对外积来讲利用(1.33)，对内积来讲利用（1.22）按分量进行展开

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}&=A_x(B_yC_z-B_zC_y)+A_y(B_zC_x-B_xC_z)\\&\quad+A_z(B_xC_y-B_yC_x)\\&=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\\&=-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}.\end{aligned}\tag{1.43}$$

很明显有引人注目的很高的对称性。各项分别含有因子A_i，

B_j，C_k。将 i，j，k（x，y，z）循环排列时，该项符号为正，反循环排列时则符号为负。而且交换内积和外积的次序也无妨。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.44}$$

（1.43）按分量的展开式用行列式来表示是方便的。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1.45}$$

根据行列式[●]的行与列的交换规则，可直接肯定（1.43）里的交换关系。根据有关行列式的 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 的对称性也能体会（1.44）所规定的关系。

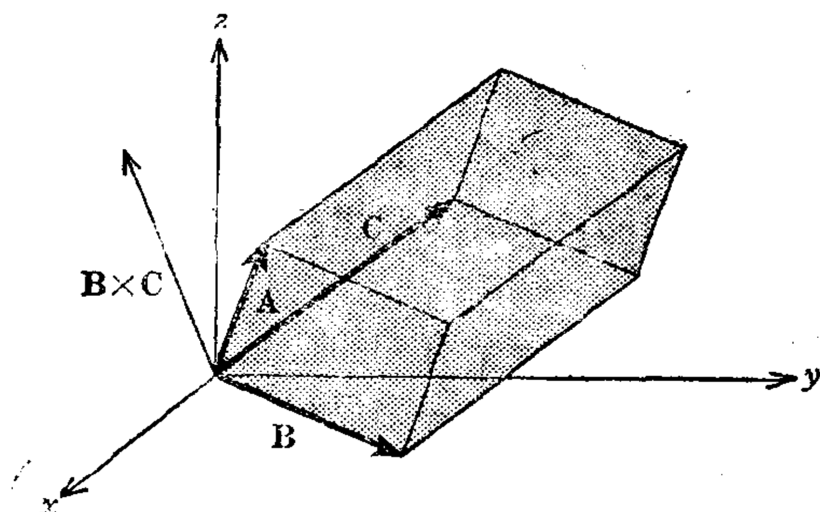


图 1.13　标量三重积的平行六面体表示

在显现出 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 垂直于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 两者的 1.4 节里，出现的三重积是普遍结果（1.43）的特殊情况。

标量三重积具有直接的几何意义。可以认为三个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 规定了平行六面体（图1.13）。

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}| &= BC\sin\theta \\ &= \text{平行六面体底面积}\end{aligned} \tag{1.46}$$

●有关行列式的性质请参考4.1节。

$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 的方向垂直于底面。$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$的内积就是底面积和$\boldsymbol{A}$在它的法线方向的投影的乘积，即底面积×高，于是

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\text{由 }\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}\text{ 确定的平行六面体的体积}$$

例题 1.5.1 对

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$$

来讲，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}\tag{1.47}$$

按第1行元素的余因子进行展开，则行列式为

$$1\times(0+1)-2\times(0-1)-1\times(0-1)=4$$

这是用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 作成的平行六面体的体积。请读者切莫忘记 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 有时是负的。在第3章里再来讨论这个问题以及它的解释。

作为标量三重积的一个有趣的应用，考虑做成倒晶格的情况。假设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是确定一个晶格的矢量（不一定要求它们必须是正交的）。从一个格点到另一个格点的距离可写成

$$\boldsymbol{r}=n_a\boldsymbol{a}+n_b\boldsymbol{b}+n_c\boldsymbol{c}\tag{1.48a}$$

n_a, n_b, n_c取整数。利用这些矢量作出

$$\boldsymbol{a}'=\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}},\quad \boldsymbol{b}'=\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}},\quad \boldsymbol{c}'=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}\tag{1.48b}$$

不难看出 $\boldsymbol{a}'$ 垂直于包含 $\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{c}$ 的平面而大小和a^{-1}成正比。实际上，我们能证明

$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{c}=1\tag{1.48c}$$

$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{b}=0\tag{1.48d}$$

倒格子的名称就是来自（1.48b）和（1.48c）．存在这种倒格子的数学上的空间经常和傅里叶分析相联系，叫做傅里叶空间。对于包括来自晶体中各种平面的波的散射的问题，倒格子是有用的。更详尽的讨论出现于R.B.Leighton的近代物理原理 pp。440-448〔New York：McGraw-Hill(1959)〕。在斜交坐标系里还要用到倒格子.

有趣的第2个三重积是$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$. 在这种情况下决不允许把括弧去掉．只要考虑特殊情况

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j} \tag{1.49}$$

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{i})\times\mathbf{j}=0$$

这就不难理解．从前面有关矢量积的讨论，就会知道矢量三重积是矢量。同时也会知道矢量积结果得到的矢量其方向垂直于$\mathbf{A}$和$(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$，由$\mathbf{B}$与$\mathbf{C}$所决定的平面垂直于$\mathbf{B}\times\mathbf{C}$,所以$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$在此平面之内.这一事实表明,$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$可以用$\mathbf{B}$与$\mathbf{C}$的线性组合来表示。于是可知

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \tag{1.50}$$

这有时作为*BAC-CAB*律而闻名。这个结果用展开成笛卡儿坐标的分量那样一种不太精致的方法可以直接加以肯定.(参考习题1.5.1）.

这个*BAC-CAB*律也许是最重要的单独的恒等式。在以后的习题里或推导其它公式时要经常使用，最好把它背诵下来。在这里要牢记因矢量与坐标系无关，所以矢量方程也就与各坐标系无关。坐标系只是确定分量．如果在笛卡儿坐标系里能确定该矢量方程，那么不论在第2章所引进的哪一种坐标系里都是正确的.

例题 1.5.2

利用在例题1.5.1所给定的三个矢量，根据（1.50），得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= (\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})(1-2)-(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})(2-1)\\
&= -\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

说得详细些

$$
\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}
$$

$$
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}
$$

利用标量三重积和矢量三重积可以简化其它更复杂的乘积。

习　题

1.5.1 试在笛卡儿坐标系里直接展开成分量，从而肯定矢量三重积的展开公式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

1.5.2 试证明（1.38）的最初的关系式

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=A^2B^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2$$

和矢量三重积的 $BAC-CAB$ 律并不矛盾。

1.5.3 给定三个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 如下

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$$

(a) 试计算标量三重积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$。利用 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，对这个标量三重积的计算结果进行几何解释。

(b) 试计算 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。

1.5.4 试证明

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$$

1.5.5 将矢量 $\boldsymbol{A}$ 分解为径矢 $\boldsymbol{A}_r$ 及切矢 $\boldsymbol{A}_t$。令$\boldsymbol{r}_0$ 为径矢方向的单位矢量时，试证明

(a) $\boldsymbol{A}_r=\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}_0)$

(b) $\boldsymbol{A}_t=-\boldsymbol{r}_0\times(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{A})$.

1.5.6 三个不为零的矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 在同一平面上的必要且充分条件是标量三重积为零，证明

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=0$$

1.5.7 三个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 规定如下

$$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{C}=-3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$$

试计算 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$ 的值。

1.5.8 矢量$\boldsymbol{D}$ 是，不在同一平面上三个矢量（不正交）的线性组合

$$\boldsymbol{D}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}$$

试证明这个系数由标量三重积的比来确定

$$a=\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}}\text{等}$$

1.5.9 试证明

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})$$
$$=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

1.5.10 试证明

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\boldsymbol{D}$$

1.5.11 就图1.12所绘的球面三角形，证明

$$\frac{\sin A}{\sin\overline{BC}}=\frac{\sin B}{\sin\overline{CA}}=\frac{\sin C}{\sin\overline{AB}}$$

$\sin A$ 是在 A 点的角的正弦，$\overline{CB}$ 是在A 的对边用弧度测得的。

提示：灵活运用习题1.5.10。

1.5.12 给定

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}, \quad \boldsymbol{b}' = \frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}},$$

$$\boldsymbol{c}' = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\neq 0$$

时，试证明

(a) $\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{y}=\delta_{xy}$，（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$），

(b) $\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^{-1}$，

(c) $\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'}{\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'}$

1.5.13 当 $\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{y}=\delta_{xy}$，（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$）时，试证明

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}$$

（这是习题1.5.12的逆证明。）

1.5.14 试证明任意矢量$\boldsymbol{V}$，能用倒矢$\boldsymbol{a}'$，$\boldsymbol{b}'$，$\boldsymbol{c}'$表示成$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}'+(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}'+(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}'$

1.5.15 以速度 $\boldsymbol{v}_1$运动的电荷q_1，建立由下式规定的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}q_1\frac{\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{r}_0}{r^2} \quad \text{（MKS单位系）}.$$

$\boldsymbol{r}_0$的方向是从电荷 q_1指向测量 $\boldsymbol{B}$ 的地点（毕奥-沙瓦定律）.

(a) 试证明利用矢量三重积则作用于速度为 $\boldsymbol{v}_2$ 的其它电荷 q_2的磁力由下式给出

$$\boldsymbol{F}_2=\frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r^2}\boldsymbol{v}_2\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{r}_0)$$

(b) 试写出 q_2 作用于 q_1 的磁力 $\boldsymbol{F}_1$。这时使用的径矢如何？$\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 有何关系？

(c) 若 q_1 与 q_2 平行运动时，试计算 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$。

答 (b) $\boldsymbol{F}_1 = -\dfrac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r^2}\boldsymbol{v}_1 \times (\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{r}_0)$. 一般在 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 之间没有简单关系. 尤其是牛顿第三定律，$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$ 并不成立.

(c) $\boldsymbol{F}_1 = \dfrac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r^2} v^2 \boldsymbol{r}_0 = -\boldsymbol{F}_2$，相互吸引。

1.6 梯度∇

$\varphi(x, y, z)$ 是标量点函数，也就是认为它的值是依赖于坐标 (x, y, z) 的值的函数. 既然是标量就和坐标系的旋转无关，在空间的一定点这个函数必须总是有相同的值. 写成式子时，有

$$\varphi'(x_1', x_2', x_3') = \varphi(x_1, x_2, x_3) \tag{1.51}$$

用 x_i' 微分时利用偏微分规则和 (1.16)，则得

$$\frac{\partial \varphi'(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_i'} = \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i}$$

$$= \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i'} = \sum_j a_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \tag{1.52}$$

和代表矢量变换法则的 (1.17) 进行比较时，就会知道 $\partial\varphi/\partial x_j$ 是矢量分量。把以此为分量的矢量叫做 φ 的梯度.

用符号简洁地表示时

$$\nabla\varphi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.53}$$

或 $$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.54}$$

$\nabla\varphi$（读作第尔 φ）虽是标量 φ 的梯度，但∇（第尔）本身是矢量微分算符（作用于标量 φ，即将 φ 微分之）。

应该强调指出，这个算符是一个混合物，它必须遵守处理矢量的规则和偏微分规则这两者。

例题 1.6.1

试计算 $f(r) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 的梯度

$$\nabla f(r) = \boldsymbol{i}\frac{\partial f(r)}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f(r)}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f(r)}{\partial z}$$

$f(r)$只有通过 r 依赖于 x。因此●

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{x}{r}$$

把这个式子代入$\nabla f(r)$，得

$$\nabla f(r) = (\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z)\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$$

$$= \frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$$

$$= \boldsymbol{r}_0\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$$

$\boldsymbol{r}_0$是指向正的径矢方向的单位矢量。

$\nabla\varphi$ 的一个直接应用是，它和长度的微小增量

●这是偏微分当中链式法则（chain rule）

$$\frac{\partial f(r,\theta,\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

的特殊情况，在这种情况下，$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$，$\frac{\partial f}{\partial r} \to \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$。

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy + \boldsymbol{k}dz \tag{1.55}$$

的内积，这时，得

$$(\nabla\varphi)\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$= d\varphi \tag{1.56}$$

这是对应于位置变化$d\boldsymbol{r}$所引起的标量函数φ的变化。令P与Q为曲面$\varphi(x,y,z)=C$（C为常量）上的两点。Q处于离开P的距离为$d\boldsymbol{r}$之处。由P向Q移动时，$\varphi(x,y,z)(=C)$的变化由

$$d\varphi = (\nabla\varphi)\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= 0 \tag{1.57}$$

确定。原因是Q也位于$\varphi(x, y, z)=C$的曲面上。这一事实表明$\nabla\varphi$和$d\boldsymbol{r}$是相互垂直的。只要$d\boldsymbol{r}$在曲面φ之上，就能由P指向任何方向，即Q虽在曲面上但能取任何方向，自然会知道$\nabla\varphi$垂直于$\varphi=C$的曲面。

现在取$d\boldsymbol{r}$使得它从一个曲面$\varphi=C_1$指向相邻曲面$\varphi=C_2$时，则

$$d\varphi = C_2 - C_1 = \Delta C$$

$$= (\nabla\varphi)\cdot d\boldsymbol{r} \tag{1.58}$$

$d\varphi$的大小一定时，取$d\boldsymbol{r}$平行于$\nabla\varphi$时$(\cos\theta=1)$则$|d\boldsymbol{r}|$的数值变得最小。或者，$|d\boldsymbol{r}|$的数值一定时，取$d\boldsymbol{r}$平行于$\Delta\varphi$则标量函数φ的变化量最大。根据这一事实可以认为$\nabla\varphi$是具有φ的变化率最大的方向的矢量。这一性质在第2章考虑非笛卡儿坐标系时很有用。

例题 1.6.2

作为到目前为止讨论的问题的特殊例子或作为例题的推广，考虑来自图1.14b的共心球壳的曲面。曲面的公式是

$$\varphi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = r_i = C_i$$

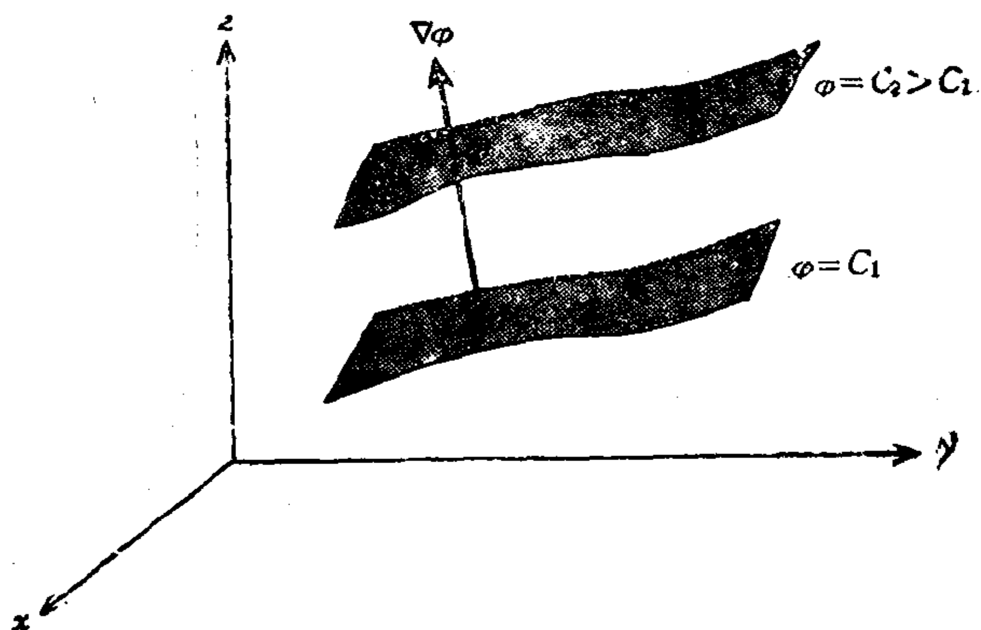


图 1.14a 梯度

r_i 是半径等于常数 C_i。$\Delta C = \Delta\varphi = \Delta r_i$ 是两个球壳之间的距离。根据例题1.6.1

$$\nabla\varphi = \mathbf{r}_0$$

标量的梯度，代表力场和势场之间的关系的情形在物理当中是特别重要的。

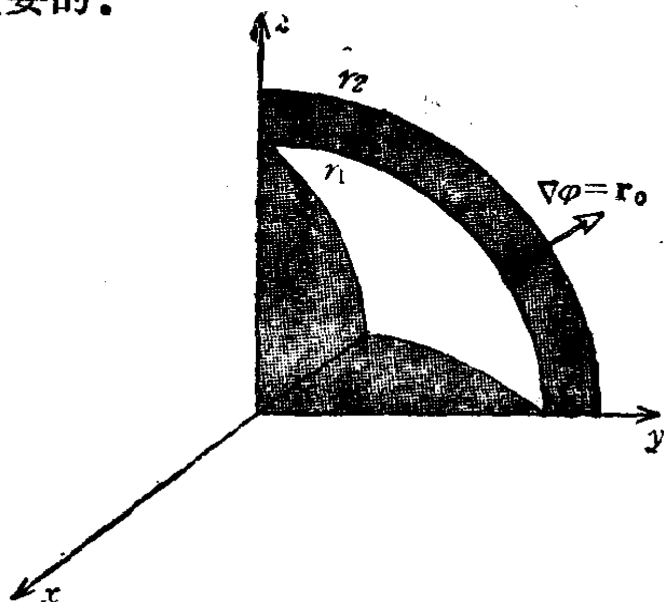


图 1.14b 对$\varphi(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$和球壳 $(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=r_2=C_2$， $(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=r_1=C_1$ 的梯度

$$力 = -\nabla(势) \tag{1.59}$$

通过重力场和静电场格外能说明上述关系。(1.59) 的负号因水总是往低处流而不会向高处流，读者是不难理解的。

习　题

1.6.1 当 $S(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$ 时，试求以下各量

(a) 在点 (1, 2, 3) ∇S 的值

(b) 在点 (1, 2, 3) 的 S 的梯度大小，$|\nabla S|$

(c) 在点 (1, 2, 3) ∇S的方向余弦。

1.6.2 (a) 在点 (1, 1, 1)试求垂直于下列曲面的单位矢量

$$x^2+y^2+z^2=3$$

(b) 试推导出在点 (1, 1, 1) 和这个曲面相切的平面方程

答 (a) $(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/\sqrt{3}$。

(b) $x+y+z=3$。

1.6.3 已知矢量 $\boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{i}(x_1-x_2)+\boldsymbol{j}(y_1-y_2)+\boldsymbol{k}(z_1-z_2)$ 时，试证明 $\nabla_1 r_{12}$ (关于 r_{12} 的大小对 x_1, y_1, z_1 的梯度) 是$\boldsymbol{r}_2$方向的单位矢量。

1.6.4 矢量场依赖于空间坐标 (x, y, z) 和时间 t 的两者时，试证明

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{F}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}\mathrm{d}t$$

1.6.5 u 与 v 是 x, y, z 的可能微分的标量函数时，试证明 $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$。

1.6.6 (a) 试证明 u (x, y, z) 与v (x, y, z) 能赋以某函数关系$f(u,v)=0$的必要且充分条件是$(\nabla u)\times(\nabla v)=0$。

(b) 当 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 时，试证明由条件 $(\nabla u)\times(\nabla v)=0$ 能推导出二维的雅可比行列式

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=0$$

此处函数 u 与 v 是可能微分的。

1.7 散度$\nabla\cdot$

矢量函数的微分是标量函数的微分的简单推广．令$\boldsymbol{r}(t)$为卫星在时刻 t 的位置。对时间求微分由

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{v}, \text{速度}$$

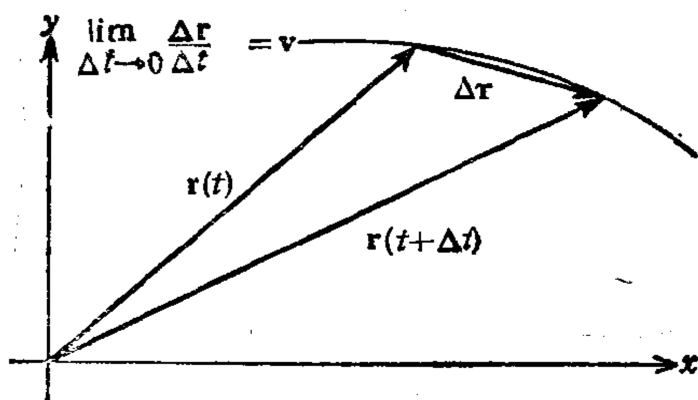


图 1.15 矢量的微分

确定。如图1.15所示给出了曲线、轨道及切线的斜率。

把$r(t)$分解为笛卡儿坐标的分量时，$d\boldsymbol{r}/dt$总是直接归结为三个以下的标量导数（三维空间的情况）的矢量和。在其它坐标系（第2章）里，由于单位矢量的方向已经不定，所以情况要复杂些。对空间微分可以和对时间微分同样处

理。这些，在下面就会清楚。

在1.6节，∇ 定义为矢量算符。这不但要注意它的矢量性还要注意它具有微分算符的性质，把它作用于矢量。首先当作矢量，取它和第2个矢量的内积时，得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{1.60}$$

这个量大家知道是$\boldsymbol{V}$的散度。这如同在1.3节已讲过是标量。

例题 1.7.1

试计算 $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z)$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

例题 1.7.2

把例题1.7.1推广到一般情形时

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} f(r) = \frac{\partial}{\partial x}[xf(r)] + \frac{\partial}{\partial y}[yf(r)] + \frac{\partial}{\partial z}[zf(r)]$$

$$= 3f(r) + \frac{x^2}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} + \frac{y^2}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} + \frac{z^2}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$$

$$= 3f(r) + r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$$

尤其是 $f(r) = r^{n-1}$时，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r}\, r^{n-1} = \nabla \cdot \boldsymbol{r}_0 r^n$$
$$= 3r^{n-1} + (n-1)r^{n-1}$$
$$= (n+2)r^{n-1}$$

当$n = -2$时这个散度变成0。这正如1.14节所示是一个重要的结果。

为了对散度的物理意义获得一些感性认识，考虑$\nabla(\cdot\rho\boldsymbol{V})$ $\cdot\boldsymbol{V}(x, y, z)$ 是在点 (x, y, z) 收缩流体的速度，$\rho(x, y, z)$ 是该点流体的密度．考虑如图1.16所示微小体积dxdydz。在单位时间内通过面$EFGH$向这个体积里流进（沿x轴正向）流体的量，(流入率)$_{EFGH}$为ρv_xdydz。通过面$ABCD$流体的流出率（沿x轴正方向）为

$$(\text{流出率})_{ABCD}=\left[\rho v_x+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

导数●是用于密度或速度不均匀以及两者都不均匀的情

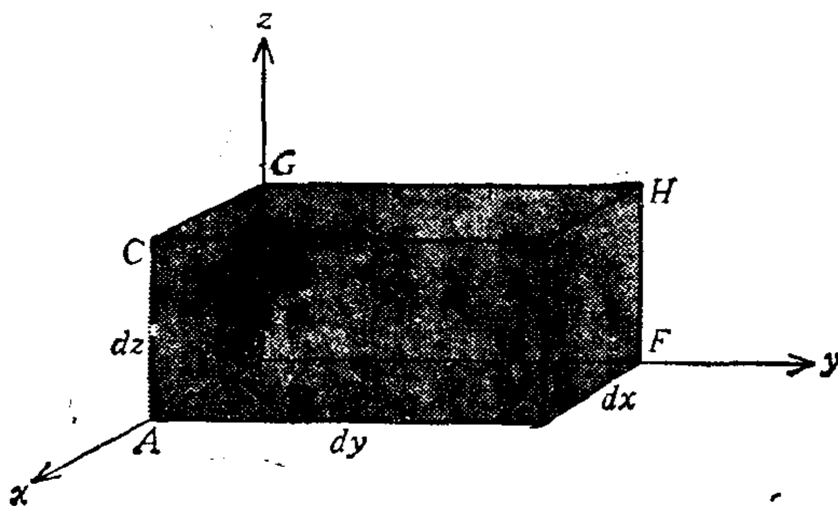


图 1.16

形● 由这两个面的净流出率等于这两个流量差，故有

$$\text{净流出率}|_x=\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

加上对于所考虑的微小体积的其它四个面的净流出率，可得

净流出量（单位时间内）

●这个表现是在麦克劳林展开里让$h=\mathrm{d}x$以后开始的部分．

●严格讲ρv_1是在面$EFGH$上的平均值，同理，$\rho v_x+\partial(\rho v_x)/\partial x\mathrm{d}x$是面$ABCD$上的平均结果．如果使用任意小的微小体积的话，这些平均值就成为这里所用的值．

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right] dxdydz$$

$$= \nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v}) dxdydz \qquad (1.61)$$

单位时间和单位体积内从体积元 $dx\,dy\,dz$ 流出的这个流体的净量是 $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$ ．根据这一事实被命名为散度。

它的直接应用在连续性方程中可以见到。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \qquad (1.62)$$

这个式子意味着，如果从所考虑的体积流出净量的话，那么在体积中密度就会减少。

f 是标量函数 $\boldsymbol{V}$ 是矢量时，则 $\nabla\cdot(f\boldsymbol{V})$ 可写成

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{V}) = \frac{\partial}{\partial x}(fV_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fV_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fV_z)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}V_x + f\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}V_y + f\frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}V_z + f\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$= (\nabla f)\cdot\boldsymbol{V} + f\nabla\cdot\boldsymbol{V} \qquad (1.62a)$$

这个式子作为乘积求导数是我们已知道的关系。

在矢量散度为　的特殊情况下

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad (1.63)$$

把该矢量 $\boldsymbol{B}$ 叫做管状的（或无源的）。作为它的实例，$\boldsymbol{B}$ 是磁感应强度，考虑到（1.63）是麦克斯韦方程组的一个式子，使用了符号 $\boldsymbol{B}$。

习　　题

1.7.1 对于在圆轨道 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}r\cos\omega t + \boldsymbol{j}r\sin\omega t$ 之上运动的粒子，回答下列各问.

(a) 试计算 $\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$.

(b) 试证明 $\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega^2\boldsymbol{r} = 0$。

其中令半径 r 与角速度 ω 是一定的。

答 (a) $k\omega r^2$。

1.7.2 矢量 $\boldsymbol{A}$ 满足（1.15）的矢量变换法则的话，它对时间的导数 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t$ 也满足（1.15），试证明 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t$ 是矢量。

1.7.3 通过分量的微分，证明下列各式。

(a) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$$

(b) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$$

这些恰好和两个代数函数的乘积求导数一样。

1.7.4 试证明 $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{b}$。

提示：当作标量三重积来处理。

1.7.5 刚体以一定的角速度 $\bar{\omega}$ 进行旋转。试证明这个刚体的速度是管状的（无源的）

1.7.6 点电荷所建立的静电场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_0}{r^2}$$

试计算 $\boldsymbol{E}$ 的散度。

1.7.7 如在第 2 章将见到的，在非笛卡儿坐标里的基矢，其大小虽是 1（$|a_i|=1$），但通常是坐标变量的函数，$\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_i(q_1, q_2, q_3)$。试证明 $\partial\boldsymbol{a}_i/\partial q_j$ 是 0 或与 $\boldsymbol{a}_i$ 正交，二者必居其一。

1.8 旋度 $\nabla\times$

利用算符 ∇ 的其它的可能运算形式是取它和矢量的外积。

$$\nabla\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}V_z-\frac{\partial}{\partial z}V_y\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}V_x-\frac{\partial}{\partial x}V_z\right)$$
$$+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}V_y-\frac{\partial}{\partial y}V_x\right)$$

$$
=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \tag{1.64}
$$

这个量叫做$\boldsymbol{V}$的旋度．展开这个行列式时（在含有∇的任何式子里都如此）必须考虑∇作为微分算符的性质．尤其是，只有把$\boldsymbol{V}\times\nabla$当作另一个微分算符才能定义．这很明显（一般）并不等于$-\nabla\times\boldsymbol{V}$❶。

在（1.64）式里要从行列式得到（1.64）式正中间的导数，就必须从最上一行向下展开之．将∇作用于标量和矢量的积时，则有

$$
\nabla\times(f\boldsymbol{V})|_x=\left[\frac{\partial}{\partial y}(fV_z)-\frac{\partial}{\partial z}(fV_y)\right]
$$

$$
=\left(f\frac{\partial V_z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}V_z-f\frac{\partial V_y}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}V_y\right)
$$

$$
=f\nabla\times\boldsymbol{V}|_x+(\nabla f)\times\boldsymbol{V}|_x \tag{1.65}
$$

为了取出y分量，进行坐标置换$x\to y$，$y\to z$，$z\to x$，为了取出z分量再进行一次坐标置换时，整理后可写成

$$
\nabla\times(f\boldsymbol{V})=f\nabla\times\boldsymbol{V}+(\nabla f)\times\boldsymbol{V} \tag{1.66}
$$

这是对应于（1.62a）的矢量积的式子。

例题 1.8.1

试计算$\nabla\times\boldsymbol{r}f(r)$．

根据（1.66）

$$
\nabla\times\boldsymbol{r}f(r)=f(r)\nabla\times\boldsymbol{r}+[\nabla f(r)]\times\boldsymbol{r}
$$

首先计算

$$
\nabla\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}=0
$$

---

❶同理，$\boldsymbol{A}$是微分算符时，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$就不一定对．特别是，对量子力学角动量算符$\boldsymbol{L}=-i(\boldsymbol{r}\times\nabla)$来讲，有$\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}=i\boldsymbol{L}$。

其次，利用$\nabla f(r)=\boldsymbol{r}_0(\mathrm{d}f/\mathrm{d}r)$（例题1.6.1），得

$$\nabla\times\boldsymbol{r}f(r)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}=0$$

由于$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0 r$和$\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}_0=0$，因此上面的矢量积为0。由于$\nabla\times\boldsymbol{V}$（计算$\nabla\times\boldsymbol{V}$的值以后）代表在空间点矢量的旋转故命名为旋度。考虑在xy-平面内，以角速度$\boldsymbol{\omega}$围绕z轴旋转的刚体。在用$\boldsymbol{r}$确定的点的速度$\boldsymbol{v}$由

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{1.67}$$

确定。从此来计算$\nabla\times\boldsymbol{v}$。因

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{1.68}$$

考虑∇作为算符的性质，利用（1.50）时：

$$\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\nabla\cdot\boldsymbol{r}\boldsymbol{\omega}-\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r} \tag{1.69}$$

在这个式子里虽和相邻的矢量作成内积，作为微分算符，作用于双方的矢量。将右边展开

$$\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\omega}\nabla\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{r}\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{r} \tag{1.70}$$

$\boldsymbol{\omega}$一定时，则（1.70）的右边的第2项与第3项消失。根据例题1.7.1

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3 \tag{1.71}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{r}&=\omega_x\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z)\\&\quad+\omega_y\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z)\\&\quad+\omega_z\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z)\\&=\boldsymbol{i}\omega_x+\boldsymbol{j}\omega_y+\boldsymbol{k}\omega_z\\&=\boldsymbol{\omega}\end{aligned} \tag{1.72}$$

将（1.71）与（1.72）代入（1.70），得

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{\omega} \tag{1.73}$$

也就是说，所考虑的刚体的速度的旋度等于角速度的二倍。在1.12节里，作为$\nabla \times \boldsymbol{v}$的意义，考虑通过外轮船的小轮能够测量的循环。从（1.72）$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\omega}$不难看出$\nabla\boldsymbol{r}$是对任意$\boldsymbol{A}$具有所谓$\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\boldsymbol{r})=\boldsymbol{A}$的意义的单位矢量。这是把矢量分析向并矢式推广时能得到的公式结果（3.5节）。

矢量$\boldsymbol{V}$的旋度总是有

$$\nabla \times \boldsymbol{V} = 0 \tag{1.74}$$

的情形，则把$\boldsymbol{V}$称为无旋的．无旋矢量的最重要的物理实例，是重力和静电力。两者都有

$$\boldsymbol{V} = C\frac{\boldsymbol{r}_0}{r^2} = C\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1.75}$$

C是常数，$\boldsymbol{r}_0$是向外的径矢方向的单位矢量。在重力的情形根据万有引力的牛顿定律$C=-Gm_1m_2$。如果$C=q_1\times q_2/4\pi\varepsilon_0$时，则（1.75）成为静电学的库伦定律（MKS单位制）。通过我们在例题里做的那样分解为笛卡儿坐标系的分量能够直接肯定（1.75）的力$\boldsymbol{V}$是无旋的。在第2章里再来讨论用球坐标来表示旋度$\nabla\times$的那种其它方法。考虑弹性体中的波动时，如果位移是无旋的，即$\nabla\times\boldsymbol{u}=0$，则平面波（远处的球面波）成为纵波。$\boldsymbol{u}$为管状，$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$时 波成为横波。地震所引起的震动能产生分解为管状部分（无源部分——译者注）和无旋部分的位移。（参考1.15节）。无旋部分形成纵型的P（最初的）地震波。管状部分成为传播得更慢的横型的S（第2的）波（例题3.6.7）。

利用梯度，散度，旋度和BAC-CAB律 能够建立或证明许多有用的矢量恒等式。为证明起见，分解为笛卡儿坐标系分量，总是一个可能的方法。有时代替把矢量分量到处移

动的规定手续，利用洞察力可以急剧缩短证明过程。

有必要牢记∇是遵从下列两组规则的混合物的某矢量算符。

(a) 矢量的规则

(b) 偏微分规则

例题 1.8.2 证明内积的梯度为

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{1}$$

只要注意到∇ $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ 和出现于矢量三重项的 BAC-CAB 律展开（1.50）的项是同型的，这个特殊例题是简单的。比如

$$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\text{❶} \tag{2}$$

∇ 只作用于 $\boldsymbol{B}$.因标量积中可以交换因子，则交换 $\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，得

$$\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\text{❷} \tag{3}$$

这回∇只作用于 $\boldsymbol{A}$。把这两个式子加起来得到把∇ 作用于乘积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 的恒等式（1）。

这个恒等式在电动力学里经常使用。习题1.8.12是它的一个简单例子。

习 题

1.8.1 将坐标系旋转之，试证明矢量旋度的各分量按矢量进行变换。

提示：必要的话可使用（1.41）有关方向余弦的恒等式。

1.8.2 如果 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别是无旋的话，试证明$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 是管状的。（无源的——译者注）

---

❶$\boldsymbol{A}$为常矢量$\boldsymbol{A}_c$，

❷B为常矢量B_c，$\nabla(A_c\cdot B)+\nabla(A\cdot B_c)=\nabla(A\cdot B)$

1.8.3 $\boldsymbol{A}$ 为无旋的话，试证明 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r}$ 是无源的。

1.8.4 矢量函数 $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ 虽不是无旋的，但 $\boldsymbol{f}$ 和标量函数 $g(x, y, z)$ 的乘积是无旋的。试证明

$$\boldsymbol{f}\cdot\nabla\times\boldsymbol{f}=0$$

1.8.5 (a) $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{i}V_x(x, y)+\boldsymbol{j}V_y(x, y)$，(b) $\nabla\times\boldsymbol{V}\neq 0$ 时，试证明 $\nabla\times\boldsymbol{V}$ 垂直于 $\boldsymbol{V}$。

1.8.6 量子力学角动量算符为

$$L_x=-i\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$L_y=-i\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$L_z=-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

试证明

$$L_xL_y-L_yL_x=iL_z$$

$$\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}=i\boldsymbol{L}$$

1.8.7 利用对易算符 $[L_x, L_y]=L_xL_y-L_yL_x$ 时，则角动量矢量 $\boldsymbol{L}$ 满足 $[L_x, L_y]=i\hbar L_z$ 等或 $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}=i\hbar\boldsymbol{L}$。另外两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相互对易的，而且它们和 $\boldsymbol{L}$ 也是对易的。即 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{L}]=[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{L}]=0$。

试证明 $[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{L}, \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{L}]=i(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{L}$

1.8.8 试肯定矢量恒等式

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$$

1.8.9 试证明

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\times\nabla)\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$$

是例题1.3.2的矢量恒等式的变形。

1.8.10 试肯定下列恒等式

$$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\nabla(A^2)-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

1.8.11 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是常矢量时，试证明

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}。$$

1.8.12 由于电流的分布出现一定的磁矩 $\boldsymbol{m}$。作用于放在外部磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 当中的 $\boldsymbol{m}$ 的力由

$$\boldsymbol{F}=\nabla\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{m})$$

确定。试证明

$$\boldsymbol{F}=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B})$$

注意：如果外场与时间无关时，根据麦克斯韦方程有 $\nabla\times\boldsymbol{B}=0$ 或 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$

1.8.13 电矩 $\boldsymbol{p}$ 的电偶极子放在原点。这个偶极子在 $\boldsymbol{r}$ 点建立由

$$\psi(\boldsymbol{r})=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

规定的电位。试计算 $\boldsymbol{r}$ 点的电场 $\boldsymbol{E}=-\nabla\psi$。

1.8.14 偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 的磁偶极子的矢量势 $\boldsymbol{A}$ 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=(\mu_0/4\pi)(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}/r^3)$ 确定。试证明磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 由

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{3\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{m})-\boldsymbol{m}}{r^3}$$

确定。

注意：引向点偶极子的极限过程，对电偶极子也好，对磁偶极子也好，都不在这里讨论。

1.8.15 液体的二维流的速度由

$$\boldsymbol{V}=iu(x,y)-j\nu\ (x,\ y)$$

确定。如果液体是不可压缩的，液流是无旋的话，

试证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

这些正是柯西·黎曼条件。

1.9 用∇连续作用得到的量

到目前为止，定义了梯度，散度，旋度．它们分别是矢量，标量，矢量。用∇作用于这些量时，得

(a) $\nabla\cdot\nabla\varphi$　(b) $\nabla\times\nabla\varphi$　(c) $\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{V}$

(d) $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{V}$　(e) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V})$

这5个量都包含二阶导数　都出现于数学物理学，特别是电磁学的二阶微分方程．

头一个量是梯度的散度，$\nabla\cdot\nabla\varphi$ 叫做 φ 的拉普拉斯．它是

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\qquad(1.76\,\text{a})$$

φ 为静电势时

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=0\qquad(1.76\,\text{b})$$

是静电学的拉普拉斯方程。$\nabla\cdot\nabla$ 经常写作 ∇^2。

例题1.9.1

试计算 $\nabla\cdot\nabla g(\boldsymbol{r})$

参考例题1.6.1和1.7.2

$$\nabla\cdot\nabla g(r)=\nabla\cdot\boldsymbol{r}_0\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}$$

$$=\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}r^2}$$

用 $1/r\cdot\mathrm{d}g/\mathrm{d}r$ 置换例题1.7.2的 $f(r)$ 就能得到上式的第2段。$g(r)=r^n$ 时，这个式子变成

$$\nabla\cdot\nabla r^n=n(n+1)r^{n-2}$$

这很明显 在 $n=0$ ($g(r)=$一定) 和 $n=-1$ 的 情 形为0。即 $g(r)=1/r$是拉普拉斯方程 $\nabla^2 g(r)=0$的一个解。

第 2 个量 (b) 可写成

$$\nabla\times\nabla\varphi=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

把行列式展开，得

$$\nabla\times\nabla\varphi=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)$$

$$=0 \tag{1.77}$$

这里假定即使交换偏微分的次序也无妨．只要 φ 的二阶偏微分是连续函数，这就是对的．这 种 情 况 从 (1.77) 容易看出，梯度的旋度恒等于0。因此所有的梯度是无旋的。

(d) 的量可以写成如下的标量三重积。

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{V}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \tag{1.78}$$

假定具有微分顺序不成问题的连续性时，这里也有

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{V}=0 \tag{1.79}$$

旋度的散度等于0。换句话说，所有的旋度是 无源的．根据赫姆霍兹定理矢量可分成无源部分和无 旋 部分。如 1.15 节所示。

剩下两个量 (c) 与 (e) 满足

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{V}-\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{V} \tag{1.80}$$

的关系。在(1.50)的 $BAC-CAB$ 律里通过改写使得 $\boldsymbol{C}$ 出现于

各项的最右边立即可以得到这个式子。所谓$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{V}$的项虽没有包含在最初的单子里，但（1.80）就定义了它。用基矢的大小与方向一定的笛卡儿坐标系把$\boldsymbol{V}$展开成分量的情形下，矢量拉普拉斯$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{V}$为

$$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{V}=\boldsymbol{i}\nabla\cdot\nabla V_x+\boldsymbol{j}\nabla\cdot\nabla V_y+\boldsymbol{k}\nabla\cdot\nabla V_z$$

也就是普通的标量拉普拉斯的矢量和。在笛卡儿坐标系里把（1.80）展开成分量，就可以肯定这个式子是矢量恒等式。

例题1.9.2 电磁波方程

作为矢量关系式（1.80）一个重要应用来推导电磁波方程。真空中麦克斯韦方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.81a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{1.81b}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.81c}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.81d}$$

$\boldsymbol{E}$是电场强度，$\boldsymbol{B}$是磁感应强度，ε_0与μ_0是介电常数与磁导率。为了从(1.81c)与(1.81d)去掉$\boldsymbol{B}$，取（1.81d）两边的旋度和（1.81c）的两边的时间微分。因关于时间和空间的微分运算可以交换，故有

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.82}$$

结果有

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{1.83}$$

利用（1.80）和（1.81b），得

$$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{1.84}$$

这是电磁波的矢量波动方程。用笛卡儿坐标系表示$\boldsymbol{E}$时，则（1.84）分离成三个标量方程（各包含一个标量拉普拉斯算符）。

习　　题

1.9.1 试将（1.80）式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{V}-\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{V}$$

在笛卡儿坐标系里直接展开成分量并证明之。

1.9.2 试利用对矢量积的 BAC-CAB 律证明恒等式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{V}-\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{V}$$

试肯定BAC项和CAB项中因子的顺序改变以后还是否正确。

1.9.3 试证明$\nabla\times(\varphi\nabla\varphi)=0$

1.9.4 u 和 v 是可能微分的标量函数时，试证明 $(\nabla u)\times(\nabla v)$是无源的。

1.9.5 φ是满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi=0$ 的标量．试证明 $\nabla\varphi$是无源的且是无旋的。

1.9.6 就标量函数 ψ 试证明

$$(\boldsymbol{r}\times\nabla)\cdot(\boldsymbol{r}\times\nabla)\psi=r^2\nabla^2\psi-r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-2r\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

1.9.7 对于星状物体（未进行旋转），平衡条件是

$$\nabla P+\rho\nabla\varphi=0$$

P 为总压力，ρ 是密度，φ 是引力势．试证明在任意一点，压力一定的曲面的法线和引力势一定的曲面的法线是平行的。

1.9.8 在泡里的电子论里，出现所谓

$$(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})\psi$$

的量。ψ为标量函数，$\boldsymbol{A}$为磁场的矢量势和磁感应强度$\boldsymbol{B}$有$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$的关系。令$\boldsymbol{p}=-i\nabla$时，试证上述的量等于$ie\boldsymbol{B}\psi$。

1.9.9 试证明$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}-k^2\boldsymbol{A}=0$的任意的解$\boldsymbol{A}$，自动地同时满足赫姆霍兹方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=0$$

和无源方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$$

1.10 矢量积分

上一节讲的是矢量的微分，现在来考虑矢量的积分问题。首先从线积分开始，再进入面积分和体积分。不论哪种场合，一般的做法都是把矢量积分还原成我们熟知的标量积分。利用长度的增量$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，可进行如下的线积分。

$$\int_c \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.85a}$$

$$\int_c \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.85b}$$

$$\int_c \boldsymbol{V}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.85c}$$

不论哪种场合积分都是沿某路径C（开的也好闭的也好）进行。因φ是标量，所以头一个积分立即成为

$$\int_c \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\int_c \varphi(x,\ y,\ z)\mathrm{d}x+\boldsymbol{j}\int_c \varphi(x,\ y,\ z)\mathrm{d}y$$
$$+\boldsymbol{k}\int_c \varphi(x,\ y,\ z)\mathrm{d}z \tag{1.86}$$

在这个分离里利用了关系式

$$\int \boldsymbol{i}\varphi\mathrm{d}x=\boldsymbol{i}\int\varphi\mathrm{d}x \tag{1.87}$$

这是因为笛卡儿坐标的基矢的大小和方向都一定时才能成立。这个关系式在这里也许一看就明白，可是在出现于第2

章的非笛卡儿坐标系里就不再成立。

(1.86) 的右边的三个积分是普通的标量积分，为了避免复杂化把它们作为黎曼积分。然而若 y 与 z 作为 x 的函数还不清楚的话，按 x 进行积分是作不出来的。按 y 与 z 进行积分也是作不出来的。这一事实表明必须确定积分路径 C。如果被积函数不具有积分值，只依赖于积分路径两端的值的特殊性质的话，则积分依赖于路径 C 的各个取法。比如，在 $\varphi = 1$ 时，(1.85a) 正好是用矢量来表示路径 C 的起点到终点的距离。在这种情况下，积分值与连结两端点的路径如何取法无关。利用 $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy + \boldsymbol{k}dz$，第 2 和第3个积分也成为标量积分。于是和 (1.85a) 一样，一般与路径的取法有关。(1.85b) 的形式和计算沿着路径移动力所做功时见到的。

$$\bar{W} = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1.88}$$

是完全一样的。在 (1.88) 里 $\boldsymbol{F}$ 是为了克服已经存在的力场，比如静电力或重力而作用于粒子或物体的力。

例题 1.10.1

利用具有方向的长度的增量 $d\boldsymbol{r}$，试把标量函数 $r^2 = x^2 + y^2$ 从原点到点 (1,1) 积分之。

$$\int_{0,0}^{1,1} (x^2 + y^2) d\boldsymbol{r}$$

将 $d\boldsymbol{r}$ 展成分量，则积分成为

$$\int_{0,0}^{1,1} (x^2 + y^2)(\boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy) = \boldsymbol{i}\int_{0,0}^{1,1} (x^2 + y^2)dx + \boldsymbol{j}\int_{0,0}^{1,1} (x^2 + y^2)dy$$

取如图 1.17 所示的积分路径．在第 1 个积分里 $y = 0$，在第 2 个积分里 $x = 1$。

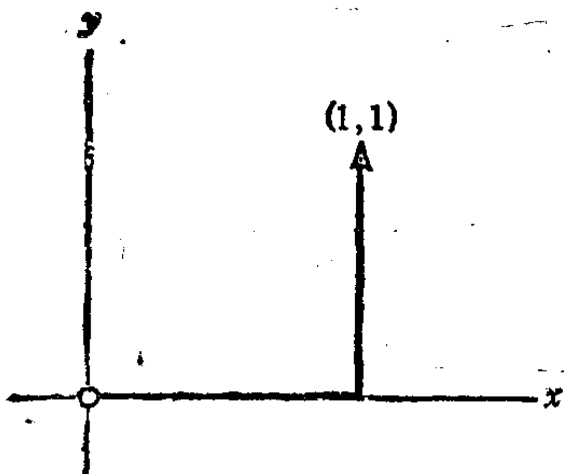


图 1.17

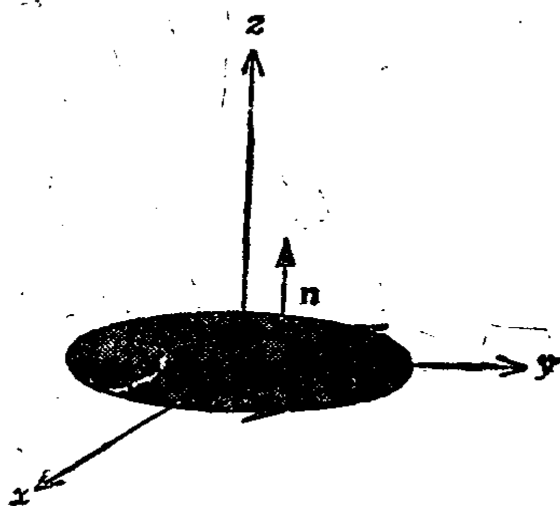


图 1.18 决定正法线方向的右手法则

利用这个积分路径，则得

$$\int_{0,0}^{1,1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\int_{0,y=0}^{1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+\boldsymbol{j}\int_{0,x=1}^{1}$$

$$\times(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\boldsymbol{i}\frac{1}{3}+\boldsymbol{j}\frac{4}{3}$$

读者不难证明，积分路径 (0, 0) → (0, 1) → (1,1) 得 $\boldsymbol{i}\frac{4}{3}+\boldsymbol{j}\frac{1}{3}$，积分路径$x=y$得$\boldsymbol{i}\frac{2}{3}+\boldsymbol{j}\frac{2}{3}$，积分值与所选择的积分路径有关。

面积分可以表示成和线积分一样的形式。在这种情况下面积元也是矢量[1] $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$。这个面积元经常写成 $\boldsymbol{n}\mathrm{d}A$。$\boldsymbol{n}$是表示正方向[2]的单位法线矢量。选择正方向有两个习惯，第一，曲面是闭曲面时，取指向外面的法线为正方向。第二，曲面张开时，正法线方向由沿开曲面周边旋转方向而定，使右手的食指指向沿着周边旋转的方向时，则右手拇指所指的方向为正方

[1] 在1.4节阐明了（平行四边形）面积能用外积矢量来表示。
[2] $\boldsymbol{n}$总是具有单位长度，它的方向当然是位置矢量的函数。

向.为了说明这个问题，在图 1.18 里xy-平面上从 x 开始按y → $-x$ → $-y$ → x 的进路画出的圆（在右手坐标系）具有指向 z 轴正方向的法线。如果读者遇见象莫比乌斯带那样具有单一侧面的曲面的话，就把它截断做成适当的朴素曲面，或者奉劝读者把它作为有毛病的曲面送到就近的数学研究室。

面积分$\int \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$是通过给定表面的流量也就是通量。为了说明散度这个名词的意义在 1.7 节计算的也就是这个流量。这种含意在 1.11 节的高斯定理里还要使用。

因体积元是标量●，所以体积分就更加简单。

$$\int_V \boldsymbol{V} d\tau = \boldsymbol{i}\int_V V_x d\tau + \boldsymbol{j}\int_V V_y d\tau + \boldsymbol{k}\int_V V_z d\tau \qquad (1.89)$$

这也是把矢量积分展开成为标量积分的矢量和。面积分和体积分的一个有趣的重要应用，是用它们把到目前为止的微分关系给出另外的定义。我们就得到

$$\nabla\varphi = \lim_{\int d\tau\to 0}\frac{\int \varphi d\boldsymbol{\sigma}}{\int d\tau} \qquad (1.90)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V} = \lim_{\int d\tau\to 0}\frac{\int \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\int d\tau} \qquad (1.91)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{V} = \lim_{\int d\tau\to 0}\frac{\int d\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{V}}{\int d\tau} \qquad (1.92)$$

在这三个式子里$\int d\tau$ 是空间的小范围的体积，$d\boldsymbol{\sigma}$ 是这个范围的矢量面积元。在 1.7 节已做过（1.91）是$\boldsymbol{V}$的散度。这里表明（1.90）和 $\nabla\varphi$ 的以前的定义（1.53）是同时成立的。为简单起见作为$\int d\tau$取微小体积$dxdydz$（图1.19）。

●经常用符号d^3r与d^3x代表在x（x,y,z或x_1,x_2,x_3）空间的体积元。

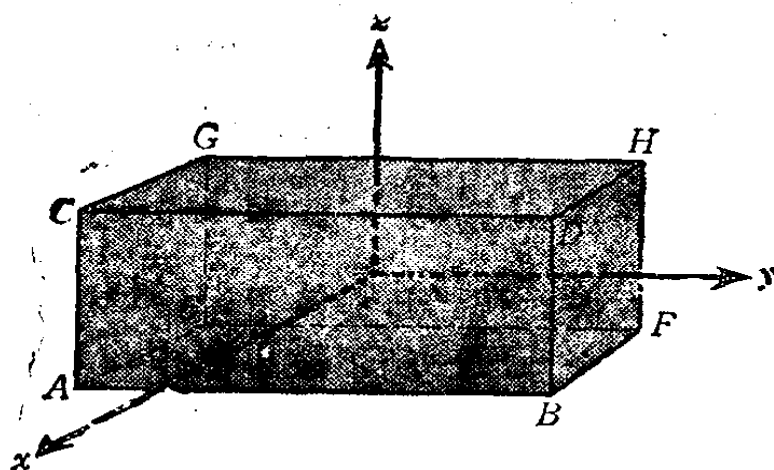


图 1.19 微小立方体（中心在原点）

现在把体积元结构上的中心置于原点。面积分在六个面各有一个。因 $d\boldsymbol{\sigma}$ 是向外的，所以对 $EFGH$ 面来讲 $d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{i}=-|d\boldsymbol{\sigma}|$，对 $ABDC$ 面来讲，利用 $d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{i}=+|d\boldsymbol{\sigma}|$ 可得

$$\int\varphi d\boldsymbol{\sigma}=-\boldsymbol{i}\int_{EFHG}\left(\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz+\boldsymbol{i}\int_{ABDC}\left(\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz$$

$$-\boldsymbol{j}\int_{AEGC}\left(\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz+\boldsymbol{j}\int_{BFHD}\left(\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz$$

$$-\boldsymbol{k}\int_{ABFE}\left(\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy+\boldsymbol{k}\int_{CDHG}\left(\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy$$

各积分是在原点计算的。于是各面中心偏离原点，由此引起的修正项包含在这个式子之内。总体积的大小是很小的（$\int d\tau=dxdydz$），所以去掉上式右边的积分符号也无妨。结果有

$$\int\varphi d\boldsymbol{\sigma}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dxdydz \tag{1.93}$$

除以

$$\int d\tau=dxdydz$$

时，就肯定了（1.90）.

这个证明由于忽略了一阶导数以上的其它修正项因而变得简单。把泰勒级数作到高次而出现的高次修正项在取

$$\int d\tau \to 0 \quad (dx \to 0,\ dy \to 0,\ dz \to 0)$$

的极限时会消失掉．在（1.90），（1.91），（1.92）里取这种极限也就是这个原故。利用微小体积dxdydz则（1.92）的证明和（1.90）的做法一样。

习　　题

1.10.1 作用于二维线性振子的力场可写成

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{i}kx - \boldsymbol{j}ky$$

沿着下列直线路径从（1,1）到（4,4）反抗这个力移动时所做的功．

（a）（1，1）→（4，1）→（4，4）

（b）（1，1）→（1，4）→（4，4）

（c）沿着$x=y$（1，1）→（4，4）

这等于沿各积分路径计算

$$-\int_{(1,1)}^{(4,4)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

1.10.2 试求反抗

$$\boldsymbol{F} = \frac{-\boldsymbol{i}y}{x^2+y^2} + \frac{\boldsymbol{j}x}{x^2+y^2}$$

所规定的力场，在xy-平面上的单位圆周上进行如下绕行时所做的功

（a）从0到π逆时针绕行时

（b）从0到$-\pi$顺时针绕行时

注意功与路径有关。

1.10.3 试计算从点（1，1）到（3，3）的功．作用力为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{i}(x-y)+\boldsymbol{j}(x+y)$$

试自行决定路径．注意这个力不是保守力。

1.10.4 试计算

$$\oint \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

注意$\oint$表示积分路径是封闭的。

1.10.5 在点（0，0，0）和用正的 x，y，z 轴上的单位长度的点所决定的单位立方体的表面上，试计算

$$\frac{1}{3}\int_S \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

注意（a）$\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$在三个面上为0，（b）剩下三个面分别对积分提供相等的贡献。

1.10.6 通过将面积分展开成分量，证明

$$\lim_{\int \mathrm{d}\tau\to 0}\frac{\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{V}}{\int \mathrm{d}\tau}=\nabla\times\boldsymbol{V}$$

提示：作为体积取微小体积 dxdydz

1.11 高斯定理

在这一节里来验证矢量面积分和该矢量导数的体积分之间的一个有用的关系。

假定矢量$\boldsymbol{V}$ 和$\nabla\cdot\boldsymbol{V}$在所研究的范围以内是连续的，则高斯定理就是关系式

$$\int_S \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}\tau \tag{1.94}$$

对于包围范围V的封闭曲面 S 是成立的。$\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ 可以认为是单位体积流体流出的净量〔(1.61)式〕．所以（1.94）的右边代表从取积分的体积 V 单位时间内流体流出的总量。左边也

是代表通过包围该体积的曲面的流量，这就立刻知道高斯定理是正确的.

如果读者不想沿着物理线索，而打算沿着数学线索知道详细而严格的证明的话，那么请参考章末所载 Kellogg 的“势论基础”（*Foundations of Potential Theory*）或其它参考书.

高斯定理的一个经常有用的‘系’，是以格林定理而闻名的关系式. u 和 v 是两个标量函数时，有下列恒等式

$$\nabla\cdot(u\nabla v)=u\nabla\cdot\nabla v+(\nabla u)\cdot(\nabla v) \tag{1.95}$$

$$\nabla\cdot(v\nabla u)=v\nabla\cdot\nabla u+(\nabla v)\cdot(\nabla u) \tag{1.96}$$

从（1.95）减去（1.96），就范围 V 进行积分（假设 u，v 和它们的导数是连续的），利用（1.94）（高斯定理）时，就得

$$\int_V(u\nabla\cdot\nabla v-v\nabla\cdot\nabla u)\mathrm{d}\tau=\int_S(u\nabla v-v\nabla u)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.97}$$

这就是格林定理. 我们说明格林函数时要使用这个定理. 从（1.95）推导出的其它形式为

$$\int_S u\nabla v\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_V u\nabla\cdot\nabla v\mathrm{d}\tau+\int_V\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}\tau \tag{1.98}$$

在 1.15 节使用的是格林定理的这种形式.

包含散度的（1.94）虽是高斯定理的最重要形式，但包含梯度或旋度的体积分也是有用的. 假定

$$\boldsymbol{V}(x,\ y,\ z)=V(x,\ y,\ z)\boldsymbol{a} \tag{1.99}$$

$\boldsymbol{a}$ 是有一定大小和任意的一定方向的矢量（方向虽可任意取，但一旦确定以后就固定于该方向）. 利用（1.62a）则（1.94）成为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\int_S V\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}&=\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{a}V\mathrm{d}\tau\\&=\boldsymbol{a}\cdot\int_V\nabla V\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1.100}$$

这个式子可改写成

$$\boldsymbol{a}\cdot\left[\int_S V\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}-\int_V \nabla V\mathrm{d}\tau\right]=0 \tag{1.101}$$

因$|\boldsymbol{a}|\neq 0$而且它的方向又是任意的（这意味着夹角的余弦不总是0），所以括弧内的量必须是0．结果有

$$\int_S V\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_V \nabla V\mathrm{d}\tau \tag{1.102}$$

同理，利用$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{P}$（$\boldsymbol{a}$为常矢量）也能证明

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{P}=\int_V \nabla\times\boldsymbol{P}\mathrm{d}\tau \tag{1.103}$$

这两种形式的高斯定理在基尔霍夫散射理论的矢量表示形式里有用．它们也被用来肯定（1.90）和（1.92）．

高斯定理还能推广到并矢式或张量（参考3.5节）．

习　题

1.11.1 S是闭曲面时，试证明

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=0$$

1.11.2 证明

$$\frac{1}{3}\int_S \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=V$$

但V代表由封闭曲面所包围的体积．

1.11.3 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$时，试证明对任意封闭曲面

$$\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=0$$

是成立的．

1.11.4 令ψ是在某体积V拉普拉斯方程的解（其导数在该处是连续的），试证明将ψ的法线方向的导数（$\partial\psi/\partial n$即$\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n}$)在$V$之中的任意封闭曲面上进行积分时

为0。

1.11.5 通过根据 1.10 节的梯度，散度，旋度的积分的定义的类推，试证明

$$\nabla^2\varphi = \lim_{\int d\tau\to 0}\frac{\int \nabla\varphi\cdot d\sigma}{\int d\tau}$$

1.11.6 电位移矢量$\boldsymbol{D}$满足麦克斯韦方程$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$，$\rho$是电荷密度、在两种介质的分界面，有电荷面密度．对$\boldsymbol{D}$的边界条件是

$$(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)\cdot\boldsymbol{n}=\sigma$$

$\boldsymbol{n}$是垂直于分界面从介质 1 出去的单位矢量。

提示：考虑如图所示薄的丸药盒。



1.11.7 在(1.62a)作为$\boldsymbol{V}$利用电场$\boldsymbol{E}$，作为f利用静电势φ。证明

$$\int\rho\varphi d\tau=\varepsilon_0\int E^2 d\tau$$

提示：假定φ在r很大处，至少比r^{-1}还快地变成0的函数即可。

1.11.8 考虑在空间局部地存在稳定的电流分布，把分界面取得很远，假定电流密度$\boldsymbol{J}$在该面上到处为0。证明

$$\int\boldsymbol{J}d\tau=0$$

提示：考虑$\boldsymbol{J}$的每个分量．让$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$时证明$J_i=\nabla\cdot x_i\boldsymbol{J}$，并利用高斯定理。

1.11.9 由电流密度 $\boldsymbol{J}$ 和磁场建立在空间局部存在的系统，则

$$\overline{W}=\frac{1}{2}\int \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}d\tau$$

的功是必要的．证明它能变换成下列形式

$$\overline{W}=\frac{1}{2}\int \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}d\tau$$

$\boldsymbol{A}$ 为磁矢量势．

提示：如果磁场与电流局部存在时，边界面取得足够远，则该面上的磁场和电流的积分可以是0．

1.12 斯托克斯定理

高斯定理是在一个函数的导数的体积分和包围这个体积的封闭曲面上该函数的积分之间建立了关系．在这一节里考虑某函数的导数的面积分和该函数的线积分之间的类似关系．该线积分的路径沿该曲面的周边来取．首先考虑旋度的面积分．将其变换之

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\int_S\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}d\sigma_y-\frac{\partial V_x}{\partial y}d\sigma_z+\frac{\partial V_y}{\partial x}d\sigma_z-\frac{\partial V_y}{\partial z}d\sigma_x+\frac{\partial V_z}{\partial y}d\sigma_x-\frac{\partial V_z}{\partial x}d\sigma_y\right) \tag{1.104}$$

这个式子是把被积函数作为标量三重积来展开的．积分是就某确定曲面来进行的．笛卡儿坐标轴的选定要使得这个曲面和平面 $x=c$（一定）的交线如图 1.20 所示的线 AB．曲面 S 的外周由在 A 点沿 x 的负方向通过 $x=c$ 平面，在 B 点沿正方向通过的曲线来确定的话，则 $d\sigma$ 如图所示向下．

特别是

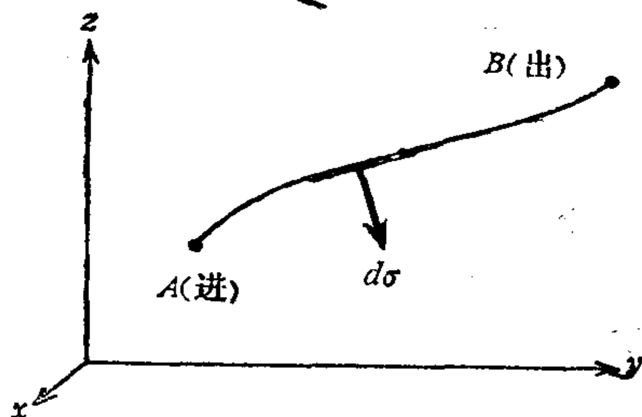


图 1.20 曲面 S 与平面 $x=c$ 的交线

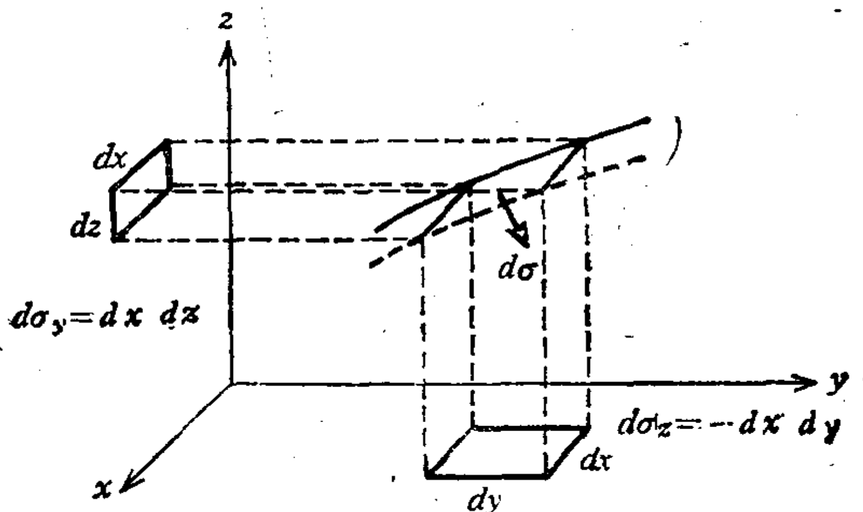


图 1.21 dσ 向 xy 与 xz 平面的投影

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_y &= \mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}\sigma_z &= -\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{1.105}
$$

因考虑局限于平面$x=c$和$x=c+\mathrm{d}x$之间的曲面S的小部分，所以增量$\mathrm{d}x$进入式子里。将V_x的导数就这小部分进行积分时，得

$$
\int_S\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}\mathrm{d}\sigma_y-\frac{\partial V_x}{\partial y}\mathrm{d}\sigma_z\right)=\int_S\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial V_x}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x \tag{1.106}
$$

从 A 点积分到 B 点当中，因 x 保持一定，所以

$$\frac{\partial V_x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial V_x}{\partial z}\mathrm{d}z=\mathrm{d}V_x \tag{1.107a}$$

上述面积分成为

$$\int \mathrm{d}x\int_A^B \mathrm{d}V_x=\int V_x(x,y_B,z_B)\mathrm{d}x-\int V_x(x,y_A,z_A)\mathrm{d}x \tag{1.107b}$$

为了表示外周考虑确定的方向时，

在外周的右侧（在B点）$\mathrm{d}x=\mathrm{d}\lambda_x$

在外周的左侧（在A点）$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\lambda_x$

$\mathrm{d}\lambda$是沿外周取的微小长度的矢量。最后，在足够覆盖总曲面的范围当中改变x，得

$$\int_S\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}\mathrm{d}\sigma_y-\frac{\partial V_x}{\partial y}\mathrm{d}\sigma_z\right)=\oint V_x\mathrm{d}\lambda_x \tag{1.108}$$

符号$\oint$意味着沿封闭路径绕行（现在是曲面的周边）的积分．将坐标循环置换，或轮流做积分（V_y的导数和平面$y=c$等），对V_y和V_z的导数也得相同的结果，把它们加起来，得

$$\int\nabla\times\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\sigma=\oint(V_x\mathrm{d}\lambda_x+V_y\mathrm{d}\lambda_y+V_z\mathrm{d}\lambda_z)$$

$$=\oint\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\lambda \tag{1.109}$$

这就是斯托克斯定理．希望知道更详细的数学严格性的读者请阅读 Kellogg 的势论基础。

和高斯定理的情形一样，也有面积分和线积分的其它关系，它们是

$$\int_S \mathrm{d}\sigma\times\nabla\varphi=\oint\varphi\mathrm{d}\lambda \tag{1.110}$$

以及

$$\int_S(\mathrm{d}\sigma\times\nabla)\times\boldsymbol{P}=\oint\mathrm{d}\lambda\times\boldsymbol{P} \tag{1.111}$$

象1.11节那样代入$V = a\varphi$，就不难肯定（1.110）。a是具有一定大小和一定方向的矢量。实际上代入斯托克斯定理（1.109），有

$$\int_S (\nabla \times a\varphi)\cdot d\sigma = -\int_S a \times \nabla\varphi \cdot d\sigma$$
$$= -a\cdot\int_S \nabla\varphi \times d\sigma \qquad (1.112)$$

对线积分来讲，因

$$\oint a\varphi \cdot d\lambda = a \cdot \oint \varphi d\lambda \qquad (1.113)$$

所以与面积分（1.112）合并之，则得

$$a\cdot\left(\oint \varphi d\lambda + \int_S \nabla\varphi \times d\sigma\right) = 0 \qquad (1.114)$$

因a的方向的取法是任意的，所以括弧当中的式子必须等于0。于是（1.110）得到肯定。利用$V = a \times P$同样能推导出（1.111）。a仍和前面一样是常矢量。

回到（1.109），可认为$\oint V\cdot d\lambda$是流体在一个轮周围的循环流，作为所考虑的曲面，取曲面$k d\sigma$的圆时，得

$$|\nabla \times V| d\sigma = xy\text{-平面内的 } d\sigma \text{ 的周围的循环}$$

这个式子是通过外轮船的小外轮的旋转来测量V的旋度的依据。如果该小外轮不旋转的话，则循环为0，根据斯托克斯定理V是无旋的。这种所谓循环的想法是斯托克斯定理的通常证明的基础。把给定曲面分割成许多微小面元，沿内部线的环流相互抵消，只剩下沿原来曲面周围的循环。

斯托克斯定理的主要应用是在下一节的主题的势论当中。

习　　题

1.12.1　有矢量$t = -iy + jx$，利用斯托克斯定理证明xy-面

内的连续封闭曲线的绕行积分是该曲线所包围的面积A

$$\frac{1}{2}\oint \boldsymbol{t}\cdot d\lambda=\frac{1}{2}\oint(xdy-ydx)=A$$

1.12.2 (a) 考虑当计算电流圈磁矩所出现的式子．将积分

$$\oint \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}$$

在xy-面内的电流圈周围进行积分，其大小等于该电流圈所包围面积的两倍，试证明之．

(b) 椭圆的周长用$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}a\cos\theta+\boldsymbol{j}b\sin\theta$来表示。

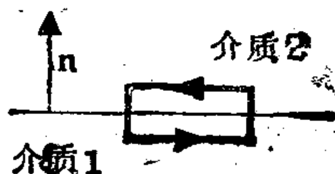
由 (a) 的结果证明椭圆面积为πab。

1.12.3 在稳定状态，磁场$\boldsymbol{H}$满足麦克斯韦方程$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}$是电流密度（对每平方米）．在两个介质的分界面，有面电流密度$\boldsymbol{K}$（每米）．试证明对$\boldsymbol{H}$的边界条件是

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{K}$$

$\boldsymbol{n}$是垂直于分界面指向介质2的单位矢量。

提示：考虑如图所示垂直于分界面的细圈。



1.12.4 根据麦克斯韦方程，$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}$是电流密度，令$\boldsymbol{E}=0$，由此式证明

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r}=I$$

I是通过积分路径所包围的面的净电流。这些式子分别是电磁学的安培定律的微分形式与积分形式。

1.12.5 磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 是由通过半径为 R 的线圈的电流建立的。试证明矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A})$ 在线圈上的大小是

$$|\boldsymbol{A}|=\frac{\varphi}{2\pi R}$$

φ 是通过线圈的总磁通量。

注意：$\boldsymbol{A}$ 在线圈的切线方向。

1.12.6 S 为封闭曲面时，试证明

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=0$$

1.12.7 利用斯托克斯定理计算 $\oint \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}$（习题1.10.4）。

1.12.8 试证明

$$\oint u\nabla v\cdot d\boldsymbol{\lambda}=-\oint u\nabla v\cdot d\boldsymbol{\lambda}$$

1.12.9 试证明

$$\oint u\nabla v\cdot d\boldsymbol{\lambda}=\int_S(\nabla u)\times(\nabla v)\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

1.12.10 利用斯托克斯定理，作出 $\nabla\times\boldsymbol{V}$ 由积分得到的定义。

注意：这是为了说明曲线坐标系当中的旋度在2.2节所用的方法。

1.13 势论

标量势 在空间的给定范围 S 的力，能用标量函数的负的梯度来表示时

$$\boldsymbol{F}=-\nabla\varphi \tag{1.115}$$

把 φ 叫做标量势．能用单值的标量势的负的梯度来表示的 $\boldsymbol{F}$ 叫做保守力。我们关心的是在什么情况下标量函数是存在的。为了解决这个问题，明确和（1.115）等效的其它两个关系式。这些式子是

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=0 \tag{1.116}$$

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{1.117}$$

积分路径是在范围S里的任意封闭路径。这三个方程之间有着能从一个式子推导出其余两个式子的关系。我们从

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\varphi \tag{1.118}$$

开始。这个式子成立时根据（1.77）

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = -\nabla \times \nabla\varphi = 0$$

即（1.115）包含（1.116）。进行线积分利用（1.56）时

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\oint \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = -\oint d\varphi \tag{1.119}$$

积分$d\varphi$得φ。因积分路径是封闭路径，积分的起点与终点是重合的。所以在（1.115）成立的范围S以内的任意封闭路径（1.119）为0。推导这些式子在这里利用了所谓势是单值的，且（1.115）在S内的所有点都成立的条件。有关这个条件的问题在利用磁标量势时会发生。只要积分路径不包围净电流，这个条件就能满足。然而，在空间内取包围净电流的积分路径时，那么磁标量势成为不是单值的，到目前为止的做法就不能用了。

回到三个式子等价性的问题，现在假设（1.117）是成立的，对于S内所有路径有$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$时，连结两点$A$和$B$的积分的值，与该路径无关。我们的前提是

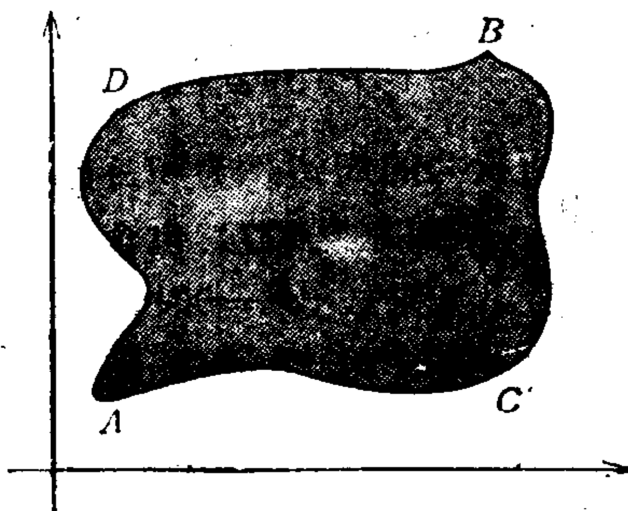


图 1.22　做功的可能路径

$$\oint_{ACBDA} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

于是，有

$$\int_{ACB}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_{BDA}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{ADB}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.120}$$

其中使积分路径走向相反则改变符号。这一事实意味着，从A到 B 移动时所作的功与该路径无关，沿封闭路一周时所做的功为0。把这种力所以称做保守力就是根据上述事实，即能量守恒。从（1.120）所示的结果，可知作功只决定于两端的点 A 与 B。即

$$\int_{A}^{B}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\varphi(A)-\varphi(B) \tag{1.121}$$

因右边的符号的选择是任意的，为了和（1.115）一致起见，仍选得保证水不是往上坡流而是往下坡流。对于离开长度 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的两点 A 与 B，（1.121）成为

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\mathrm{d}\varphi=-\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.122}$$

这个式子可改写为

$$(\boldsymbol{F}+\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0 \tag{1.123}$$

因 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是任意的，会出现（1.115）。如果

$$\oint\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$

利用斯托克斯定理（1.109）能得到（1.116）。

$$\oint\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\sigma \tag{1.124}$$

取微小面积 $\mathrm{d}\sigma$ 的周边作为积分路径时，则面积分的被积函数必须是0，所以（1.117）包含（1.116）。

最后，如果 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ 时，只把前面利用了斯托克斯定理（1.124）的讨论倒过来即可。于是通过从（1.121）到（1.123）的线索，就能推导出最早提示的 $\boldsymbol{F}=-\nabla\varphi$。

总之，只有 $\boldsymbol{F}$ 是无旋的时候，也就是只有沿任意封闭路径作功为0时，才存在单值的标量势。由（1.75）所规定的重力与静电力的场因是无旋的，故为保守力。重力标量势与静电标量势是存在的。

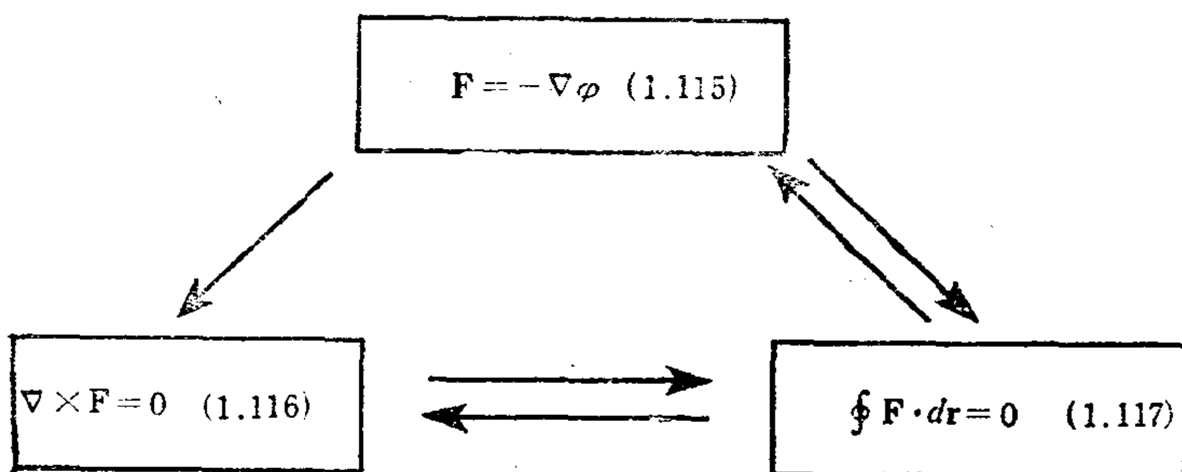


图 1.23 等价公式

例题 1.13.1 试求作用于质量为m_1的重力标量势。

$$\boldsymbol{F}_G=-\frac{Gm_1m_2\boldsymbol{r}_0}{r^2}=-k\frac{\boldsymbol{r}_0}{r^2}$$

它沿着径矢的向里方向作用。从无穷远把（1.115）积分到$\boldsymbol{r}$点。得

$$\varphi_G(r)-\varphi_G(\infty)=-\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{F}_G\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=+\int_{r}^{\infty}\boldsymbol{F}_G\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad (1.125)$$

利用$\boldsymbol{F}_G=-\boldsymbol{F}_{实用}$，和（1.88）进行比较时，这个势是把粒子从无穷远拿来所作的功（由于我们只能求得势的差．其中势为0的无穷远点是任意选的）。因（1.125）右边的积分为负，所以$\varphi_G(r)$也是负的。由于$\boldsymbol{F}_G$沿着径矢方向，只有$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$指向径矢方向才对φ有贡献．用式子表达为

$$\varphi_G(r)=\int_{r}^{\infty}-\frac{k\mathrm{d}r}{r^2}=-\frac{k}{r}=-\frac{Gm_1m_2}{r}$$

最后的负号是因为重力是引力的结果。

例题 1.13.2

试求出对于单位质量的离心力$\boldsymbol{F}_c=\omega^2r\boldsymbol{r}_0$（径矢方向向外）的标量势。在物理上可以想象把自己放在游戏场的大型

水平旋转的圆盘之上。与例题1.13.1一样，但积分从原点开始并让 $\varphi_C(0)=0$ 时

$$\varphi_C(r)=-\int_0^r \boldsymbol{F}_C\cdot d\boldsymbol{r}=-\frac{\omega^2 r^2}{2}$$

使符号相反，让 $F_{SHO}=-k\boldsymbol{r}$ 时（SHO：简谐 振子——译者注）得简谐振子的势 $\varphi_{SHO}=\frac{1}{2}kr^2$。

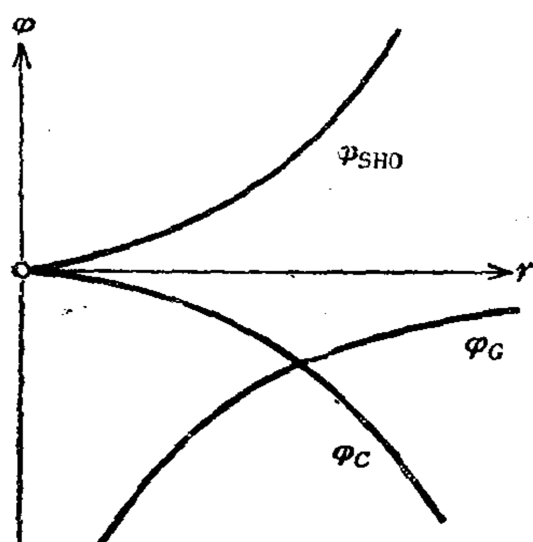


图 1.24 距离与势能的关系（重力，离心力，简谐振子）

重力、离心力和简谐振子的势，如图1.24所示。

很明显简谐振子的势要建立稳定，意味着有恢复力。离心力的势代表不稳定性。

经常讲，热力学的内容是寻找正确的全微分，于是出现下列形式的方程

$$df=P(x,y)dx+Q(x,y)dy \qquad (1.126a)$$

通常，问题的焦点是 $\int(P(x,y)dx+Q(x,y)dy)$ 是否只决定于积分路径的两端，即 df 实际上是否是真正的全微分。为此，其必要且充分条件是

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (1.126b)$$

即

$$P(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (1.126c)$$

(1.126b) 取决于是否能满足关系式

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad (1.126d)$$

这正好和保证$\boldsymbol{F}$是无旋的必要条件 (1.116) 相类似. 实际上, 由 (1.116) 的z分量, 得

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad (1.126e)$$

矢量势　在物理学的某领域, 特别是在电磁学里, 引入力场 $\boldsymbol{B}$ 由

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (1.127)$$

规定的矢量势 $\boldsymbol{A}$ 是颇为方便的. (1.127) 成立的话, 根据 (1.79) 很明显有$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$, $\boldsymbol{B}$是无源的. 在这里再考虑相反的命题. 即 $\boldsymbol{B}$ 是无源时, 证明矢量势 $\boldsymbol{A}$ 是存在的. 实际计算 $\boldsymbol{A}$ 证明它的存在. 假设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}b_1+\boldsymbol{j}b_2+\boldsymbol{k}b_3$, 未知的 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{i}a_1+\boldsymbol{j}a_2+\boldsymbol{k}a_3$. 根据 (1.127) 有

$$\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}=b_1 \qquad (1.128a)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}=b_2 \qquad (1.128b)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}=b_3 \qquad (1.128c)$$

假设选择坐标系使得 $\boldsymbol{A}$ 平行于 yz-平面. 即 $a_1=0$. 这时,

$$b_2=-\frac{\partial a_3}{\partial x}$$

$$b_3=\frac{\partial a_2}{\partial x} \qquad (1.129)$$

把它们积分之, 有

$$a_2 = \int_{x_0}^{x} b_3 \mathrm{d}x + f_2(y,z)$$

$$a_3 = -\int_{x_0}^{x} b_2 \mathrm{d}x + f_3(y,z) \qquad (1.130)$$

f_2 与 f_3 虽是 y 与 z 的任意函数，但不是 x 的函数。利用 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 则（1.128 a）成为

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = -\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z}\right)\mathrm{d}x + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial b_1}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \qquad (1.131)$$

对 x 积分之，得

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = b_1(x,y,z) - b_1(x_0,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \qquad (1.132)$$

因 f_2 与 f_3 是 y 与 z 的任意函数，所以选择

$$f_2 = 0$$

$$f_3 = \int_{y_0}^{y} b_1(x_0,y,z)\mathrm{d}y \qquad (1.133)$$

时，则（1.132）的右边成为 $b_1(x,y,z)$ 和（1.128a）一致。利用由（1.133）确定的 f_2 与 f_3 时，能作出 $\boldsymbol{A}$。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{j}\int_{x_0}^{x} b_3(x,y,z)\mathrm{d}x + \boldsymbol{k}\left[\int_{y_0}^{y} b_1(x_0,y,z)\mathrm{d}y - \int_{x_0}^{x} b_2(x,y,z)\mathrm{d}x\right] \qquad (1.134)$$

这个结果并不完全．因 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的导数，$\boldsymbol{A}$ 加上任意常数也无妨．比这更重要的情形是，在对 $\boldsymbol{B}$ 无任何影响的情况下把任意标量函数的梯度加到 $\boldsymbol{A}$ 上是可能的。函数 f_2 与 f_3 并

不是唯一确定的，还可以选择其它形式。如1.15节所表明的，也能确定$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$的值。

例题 1.13.3

为了说明磁矢量势的计算，考虑特殊且重要的情形，固定的磁感应强度

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{k}B_z \tag{1.135}$$

B_z为常量。（1.128）成为

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}&=B_z\end{aligned} \tag{1.136}$$

和前面一样，令$a_1=0$时，由（1.134），得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{j}\int^x B_z \mathrm{d}x=\boldsymbol{j}xB_z \tag{1.137}$$

已假设积分常数为0。立刻可以肯定这个$\boldsymbol{A}$实际上满足（1.127）。

取a_1为0并不是绝对的。为了表示至少不是必要的，让$a_3=0$试试看。从（1.136）

$$\frac{\partial a_2}{\partial z}=0 \tag{1.138a}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z}=0 \tag{1.138b}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}=B_z \tag{1.138c}$$

a_1和a_2与z无关时，就会知道

$$a_1=a_1(x,y),\quad a_2=a_2(x,y) \tag{1.139}$$

令

$$a_2 = p\int^x B_z dx = pxB_z \tag{1.140}$$

$$a_1 = (p-1)\int^y B_z dy = (p-1)yB_z \tag{1.141}$$

则（1.138c）是可以满足的，p为任意常数。结果是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}(p-1)yB_z + \boldsymbol{j}pxB_z \tag{1.142}$$

这里容易知道（1.127），（1.135），（1.142）是没有矛盾的。比较（1.137）与（1.142）时，立刻会知道 $\boldsymbol{A}$ 不是唯一的。把（1.142）改写成●

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}y - \boldsymbol{j}x)B_z + \left(p - \frac{1}{2}\right)(\boldsymbol{i}y + \boldsymbol{j}x)B_z \tag{1.143}$$

$$= -\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}y - \boldsymbol{j}x)B_z + \left(p - \frac{1}{2}\right)B_z\nabla\varphi$$

$$\varphi = xy \tag{1.144}$$

时，能够阐明（1.137）与（1.142）的差别和（1.142）进入了参数中。

$\boldsymbol{A}$ 的第一项是对于固定的 $\boldsymbol{B}$，通常相当于

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}) \tag{1.145}$$

在许多问题里，由建立磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 能计算出磁矢量势$\boldsymbol{A}$。这一事实意味着求解（矢量的）泊松方程（参考习题1.14.5）。

习　题

1.13.1 力$\boldsymbol{F}$ 由

$$\boldsymbol{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n(\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z)$$

●$\varphi(x, y) = xy$ 很明显不是在 1.3 节所使用的意义下的标量函数，即 xy 对围绕 z 轴的旋转并不是不变的。如果不变性是必要的话，则参数 p 必须等于 1/2。

规定时 试计算下列各量

(a) $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$

(b) $\nabla\times\boldsymbol{F}$

(c) 成为$\boldsymbol{F}=-\nabla\varphi$的标量势$\varphi(x,y,z)$

(d) 当幂指数n取何值时，标量势φ在原点及无穷远都发散

答 (a) $(2n+3)r^{2n}$ (c) $-\dfrac{1}{2n+2}r^{2n+2}$，$n\neq-1$

(b) 0 (d) $n=-1$，$\varphi=-\ln r$。

1.13.2 半径为a的球（对整个体积）均匀带电．求在$0\leqslant r<\infty$的范围里的静电势$\varphi(r)$．提示：如1.14节所示，作用于$r=r_0$处的试验电荷的库仑力，只决定于比r_0小的r处的电荷，而与大于r_0的r处的电荷无关。须注意对于球对称分布电荷才能这样讲．

1.13.3 计算给定势内粒子的运动，是经典力学的普通问题．对于具有均匀密度（ρ_0）不旋转的球，作用于r_0处质量为m_0的质点的重力，根据1.14节的高斯法则，可以推导出它是由来自$r\leqslant r_0$范围里的质量的引力所产生，$r>r_0$处的质量对该重力毫无贡献可言．

(a) 试证明$\boldsymbol{F}/m_0=-(4\pi G\rho_0/3)\boldsymbol{r},(0\leqslant r\leqslant a)$。$a$为球的半径。

(b) 试求对应于$0\leqslant r\leqslant a$的此力的重力势。

(c) 考虑通过地球中心穿到另一侧的垂直孔．忽略地球的旋转，假定均匀密度$\rho_0=5.5\text{g/cm}^3$，计算落于该孔内粒子的运动状态．周期是多少？

1.13.4 流有电流I的长直导线，建立由下式表示的磁感应强度$\boldsymbol{B}$。

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)$$

试求磁矢量势 A。

答 $A=-k(\mu_0 I/4\pi)\ln(x^2+y^2)$.

（这个解并不是唯一的）

1.13.5

$$B=\frac{r_0}{r^2}=\left(\frac{x}{r^3},\ \frac{y}{r^3},\ \frac{z}{r^3}\right)$$

时，试求当 $\nabla\times A=B$ 的 A. 一个允许解是

$$A=\frac{iyz}{r(x^2+y^2)}-\frac{jxz}{r(x^2+y^2)}$$

1.13.6 试证明一对方程

$$A=\frac{1}{2}(B\times r)$$

$$B=\nabla\times A$$

能为任意常矢量 B（可取任意方向）所满足。

1.13.7 磁感应强度 B 和磁矢量势 A 有着 $B=\nabla\times A$ 的关系，根据斯托克斯定理，有

$$\int B\cdot d\sigma=\oint A\cdot dr$$

试证明对于规范变换 $A\to A+\nabla\varphi$ 这个式子的两边都是不变的。

注意：完整的规范变换在习题3.7.3里讨论。

1.13.8 对电场 E 和磁矢量势 A 来讲，$(E+\partial A/\partial t)$ 是无旋的，因此可写成

$$E=-\nabla\varphi-\frac{\partial A}{\partial t}$$

试证明之。

1.13.9 作用于以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的电荷 q 的力为

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

利用标量势 φ 和矢量势 $\boldsymbol{A}$ 证明

$$\boldsymbol{F}=q\left[-\nabla\varphi-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})\right]$$

须注意这里用时间的全微商代替了习题 1.13.8 里 $\boldsymbol{A}$ 的时间偏微商.

1.14 高斯法则和泊松方程

高斯法则　考虑坐标原点有点电荷的情形。这个电荷产生由

$$\boldsymbol{E}=\frac{q\boldsymbol{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\tag{1.146}$$

所规定的电场 $\boldsymbol{E}$. 由此来推导高斯法则。这个法则是，$\boldsymbol{E}$ 在封闭曲面上的积分为

$$\int_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}\dfrac{q}{\varepsilon_0}, & (S\text{包含原点时})\\[2ex] 0 & (\text{不包含时})\end{cases}\tag{1.147}$$

利用高斯定理（1.94）（于是省去 $q/4\pi\varepsilon_0$），根据例题 1.7.2，得

$$\int_S\frac{\boldsymbol{r}_0\cdot\mathrm{d}\sigma}{r^2}=\int_V\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}_0}{r^2}\right)\mathrm{d}\tau=0\tag{1.148}$$

曲面 S 不包含原点。在原点被积函数没有意义.（1.148）证明了高斯法则的第 2 部分（不包含原点时）.

曲面 S 包含原点的第 1 部分，通过用半径为 δ 的小球 S' 包围原点可以处理。为了明确内侧与外侧的区别，认为曲面 S 外侧范围和曲面 S' 的内侧范围（$r<\delta$）用小孔联系着。这个孔把 S 与 S' 连结起来，使它们成为一个单连通封闭曲面。

假定所考虑的孔的半径小到可以忽略的程度，从而对面积无任何贡献。把高斯定理应用于 S 与 S' 之间的范围里，不会有任何困难。结果有

$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{r^2} + \int_{S'} \frac{\boldsymbol{r}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'}{\delta^2} = 0 \qquad (1.149)$$

在第 2 个积分里让 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' = -\boldsymbol{r}_0\delta^2\mathrm{d}\Omega$ 进行计算。$\mathrm{d}\Omega$ 是立体角元。在1.10节已讨论过，负号是由于正法线方向穿过封闭曲面向外。在目前情况下，向外法线矢量 $\boldsymbol{r}_0'$ 指向负的径矢方

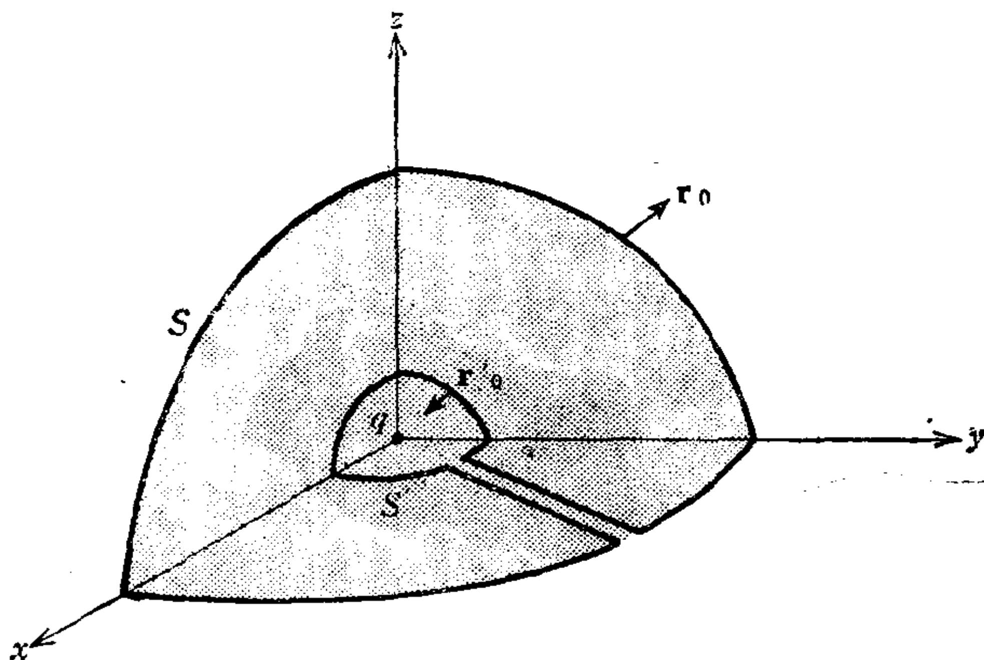


图 1.25 原点的挖除

向。即 $\boldsymbol{r}_0' = -\boldsymbol{r}_0$。按所有角度进行积分，得

$$\int_{S'} \frac{\boldsymbol{r}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'}{\delta^2} = -\int_{S'} \frac{\boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{r}_0\delta^2\mathrm{d}\Omega}{\delta^2} = -4\pi \qquad (1.150)$$

与半径 δ 无关。根据（1.146）的定义，这个式子成为

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (1.151)$$

这就完成了高斯法则的证明。虽让曲面为球面，须注意并不

要求 S 必需是球面。

再把讨论深入一步，考虑具有一定分布的电荷的情形

$$q=\int_V \rho \mathrm{d}\tau \tag{1.152}$$

即使在这种情况下，如果把 q 看成是分布于曲面 S 所包围的范围的总电荷时，仍能使用（1.151）。

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\sigma=\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}\tau \tag{1.153}$$

利用高斯定理有

$$\int_V \nabla\cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau=\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}\tau \tag{1.154}$$

因所考虑的范围V 是任意的，因此两边的被积函数相等. 即得到麦克斯韦方程之一

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.155}$$

把到目前为止的讨论倒过来的话，立即可由麦克斯韦方程求得高斯法则.

泊松方程　用 $-\nabla\varphi$ 置换$\boldsymbol{E}$时，则（1.155）变成

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.156}$$

这是泊松方程. 在$\rho=0$的条件下。这个式子成为更有名的方程，拉普拉斯方程

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=0 \tag{1.157}$$

在处理各种坐标系时（第 2 章），或者讨论作为方程的解的数学物理的特殊函数时，都会经常碰到拉普拉斯方程。

当阐明格林函数理论时，泊松方程是极为重要的。

习　题

1 14.1 试求二维情况下的高斯法则. 在二维里有

$$\varphi = -q\frac{\ln\rho}{2\pi\varepsilon_0}, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = q\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

q是原点处电荷，另外，所研究的二维系统，乃是三维（圆柱型的）系的具有单位厚度薄片的情形，对于单位长度的线电荷。变量ρ是沿着由线电荷向外的方向测得的。$\boldsymbol{\rho}_0$为ρ方向的单位矢量（参考2.6节）。

1.14.2 (a) 试从麦克斯韦方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

引出高斯法则，ρ为通常的电荷密度。

(b) 假定点电荷q建立的电场是球对称的，试从高斯法则推导出库仑反平方定律

$$\boldsymbol{E} = \frac{q\boldsymbol{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

1.14.3 试证明任意点P静电势φ的值等于以P为中心的任意球面上的势φ的平均值。但该球面上及其内部无电荷。

提示：让$u^{-1}=r$（离开P的距离），$v=\varphi$利用(1.97)的格林定理。

1.14.4 积蓄于静电场的能量可写成

$$W = \frac{1}{2}\int\rho(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau$$

$\rho(\boldsymbol{r})$是电荷密度，$\varphi(\boldsymbol{r})$是静电势。试证明利用电场$\boldsymbol{E}$这个式子可用

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2\mathrm{d}\tau$$

表示．令电荷是定域的，由此式可知能量密度为$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$。

1.14.5 在静系（稳定电流）里，试利用麦克斯韦方程证明磁矢量势 $\boldsymbol{A}$ 满足矢量的泊松方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J}$$

但假设 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$。

1.15 赫姆霍兹定理

在1.13节强调了磁矢量势 $\boldsymbol{A}$ 不能唯一地确定。$\boldsymbol{A}$ 的散度仍是未定的。在这一节里，阐明有关矢量的散度与旋度的两个定理。第1个定理如下：

"通过在一定范围内给定矢量的散度与旋度，并给定该范围的分界面上法线方向的分量，可以唯一地确定一个矢量"

为证明起见，让

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V}_1 = s$$

$$\nabla \times \boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{c} \tag{1.158}$$

可以认为，s 是源密度（电荷密度），$\boldsymbol{c}$ 为环流密度（电流密度）。分界面上的法线分量 V_{1n} 也给定时，想要证明 $\boldsymbol{V}_1$ 是唯一的。为此假定有满足（1.158）而且在分界面上具有相同法线分量 V_{1n} 的第2个矢量 $\boldsymbol{V}_2$。于是要证明 $\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2 = 0$，首先让

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2$$

这时

$$\nabla \cdot \boldsymbol{W} = 0 \tag{1.159}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{W} = 0 \tag{1.160}$$

因 $\boldsymbol{W}$ 是无旋的，所以可写成（从1.13节）

$$\boldsymbol{W} = -\nabla \varphi \tag{1.161}$$

把这个式子代入（1.159），得（拉普拉斯方程）

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = 0 \tag{1.162}$$

把由（1.98）规定的格林定理，用于 $u = v = \varphi$ 的情形。

因在分界面S上

$$W_n = V_{1n} - V_{2n} = 0 \tag{1.163}$$

格林定理成为

$$\int_V (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)\mathrm{d}\tau = \int_V \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}\mathrm{d}\tau = 0 \tag{1.164}$$

因量 $\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W} = W^2$ 不能为负，所以V内必须到处有

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2 = 0 \tag{1.165}$$

于是因$\boldsymbol{V}_1$是唯一的，故定理得证。

对磁矢量势$\boldsymbol{A}$来讲，关系 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ 决定 $\boldsymbol{A}$ 的旋度。为方便起见，我们经常让 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$（参考习题1.14.5）时，给定边界的话就确定了 $\boldsymbol{A}$。

这个定理也可写成，对于拉普拉斯方程的解的唯一性定理（习题1.15.1）。求解静电学或其它领域的拉普拉斯方程的边界值问题时，用这种形式表示的唯一性定理是非常重要的。如果能找到满足必要边界条件的拉普拉斯方程的一个解时，这个解就是完整的解。

赫姆霍兹定理　第2个定理是赫姆霍兹定理。"利用了在无穷远处为0的源密度s和环流密度$\boldsymbol{c}$的情形的（1.158），矢量$\boldsymbol{V}$是满足它的。这种矢量$\boldsymbol{V}$可写成一个是无旋的，另一个是无源的两部分之和"。矢量$\boldsymbol{V}$能写成

$$\boldsymbol{V} = -\nabla\varphi + \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.166a}$$

时，很明显能满足赫姆霍兹定理。原因是$-\nabla\varphi$是无旋的，$\nabla\times\boldsymbol{A}$是无源的。现在来明确（1.166）。

假设$\boldsymbol{V}$为已知矢量。令其散度与旋度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V} = s(\boldsymbol{r}) \tag{1.166b}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{V} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}) \tag{1.166c}$$

时，则$s(\boldsymbol{r})$与$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r})$是和位置有关的函数。由这两个函数作出标量势$\varphi(\boldsymbol{r}_1)$，

$$\varphi(\boldsymbol{r}_1)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{s(\boldsymbol{r}_2)}{r_{12}}\mathrm{d}\tau_2 \tag{1.167a}$$

和矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_1)$，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_1)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)}{r_{12}}\mathrm{d}\tau_2 \tag{1.167b}$$

$\boldsymbol{r}_1$表示势场的点（x_1，y_1，z_1），$\boldsymbol{r}_2$表示建立势的源的坐标（x_2，y_2，z_2）。r_{12}是

$$r_{12}=[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^{1/2} \tag{1.168}$$

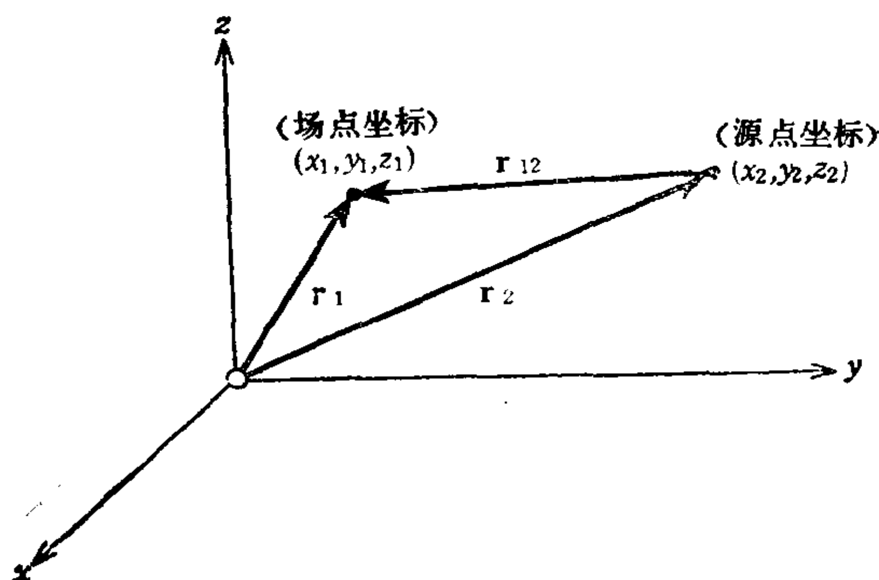


图 1.26　源点与场点坐标

考虑r_{12}的方向的话，则从源点到场点的方向作为正方向。写成矢量的话，如图 1.26 所示的$\boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$。当然，为了上述积分值能存在，就必须要求 s 与 $\boldsymbol{c}$ 在远处相当迅速地变成0。

根据这一节开头所阐述的唯一性定理，$\boldsymbol{V}$能够由它的散度 s 和它的旋度 $\boldsymbol{c}$（以及边界条件）唯一地确定。根据

(1.166)，有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = -\nabla \cdot \nabla \varphi \tag{1.169a}$$

这是因为散度的旋度等于0，而梯度的旋度也是0，故有

$$\nabla \times \boldsymbol{V} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.169b}$$

因此如果能证得

$$-\nabla \cdot \nabla \varphi(\boldsymbol{r}_1) = s(\boldsymbol{r}_1) \tag{1.169c}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_1) \tag{1.169d}$$

的话，那么由(1.166)规定的$\boldsymbol{V}$就会具有正确的散度与旋度。即到目前为止的阐述不存在内在矛盾，也就肯定了(1.166)。

首先考虑$\boldsymbol{V}$的散度，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = -\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{1}{4\pi}\nabla \cdot \nabla \int \frac{s(\boldsymbol{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2 \tag{1.170}$$

拉普拉斯算符$\nabla . \nabla$或∇^2作用于场点坐标（x_1，y_1，z_1）。因此它和对（x_2，y_2，z_2）的积分进行交换也可以。结果有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = -\frac{1}{4\pi}\int s(\boldsymbol{r}_2) \nabla_1^2 \left(\frac{1}{r_{12}}\right) d\tau_2 \tag{1.171}$$

在1.14节说明高斯法则时，已证明了

$$-\int \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}_0}{r^2}\right) d\tau = \int \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \begin{cases} -4\pi \\ 0 \end{cases} \tag{1.172}$$

两个值对应于，这个积分包含原点$r=0$的情形（-4π）和不包含原点的情形（0）。通过狄拉克的δ函数$\delta(\boldsymbol{r})$可以更恰当地表示出来。

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi \delta(\boldsymbol{r}) \tag{1.173}$$

这个狄拉克的δ函数，由下列性质来定义，

$$\delta(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{r} \neq 0 \tag{1.174a}$$

$$\int f(\boldsymbol{r}) \delta(\boldsymbol{r}) d\tau = f(0) \tag{1.174b}$$

$f(\boldsymbol{r})$是任意的朴素函数，积分范围包含原点。作为(1.174b)

的特殊情况。

$$\int\delta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=1 \tag{1.175}$$

因量$\delta(\boldsymbol{r})$在$\boldsymbol{r}=0$不能定义（无穷大），实际上这不是普通的函数。然而（1.174b）的难解性质作为一系列函数的极限的超函数能严格地加以说明。这里以δ函数的定义的性质为基础来用它。

在使用δ函数以前，必须对（1.173）进行两个小的修正。第1，建立势的源不在原点而在$\boldsymbol{r}_2$点。因此只有当曲面包含$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2$点时，高斯法则才成为$4\pi$。为了表示这一事实，把（1.173）改写为

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) \tag{1.176}$$

把势的源移动到$\boldsymbol{r}_2$，也就是认为δ函数的定义式（1.174）成为

$$\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=0,\quad \boldsymbol{r}_1\neq\boldsymbol{r}_2 \tag{1.177 a}$$

$$\int f(\boldsymbol{r}_1)\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1=f(\boldsymbol{r}_2) \tag{1.177 b}$$

第2，因r_{12}^{-1}对x_2，y_2，z_2微分两次和对x_1，y_1，z_1微分两次是一样的，故有

$$\nabla_1^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)=\nabla_2^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$$

$$=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1) \tag{1.178}$$

另外，从δ函数的定义性质也会知道

$$\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1) \tag{1.179}$$

利用（1.178）改写（1.171），利用狄拉克的δ函数的性质进行积分时，得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=-\frac{1}{4\pi}\int s(\boldsymbol{r}_2)\nabla_2^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\mathrm{d}\tau_2$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int s(\boldsymbol{r}_2)(-4\pi)\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\mathrm{d}\tau_2$$

$$= s(\boldsymbol{r}_1) \qquad (1.180)$$

这最后式子是把（1.177 b）里的角标 1 和 2 交换以后得到的。（1.180）表明，$\boldsymbol{V}$ 的假定形式（1.166）及标量势 φ 的形式（1.167 a）具有给定的散度的值（1.166 a）。

为了完成赫姆霍兹定理的证明，有必要阐明开头的假定和（1.166 b）并不矛盾，即 $\boldsymbol{V}$ 的旋度等于 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_1)$。根据（1.166）有

$$\nabla\times\boldsymbol{V} = \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$= \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A} \qquad (1.181)$$

利用（1.167 b），第一项 $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$ 成为

$$4\pi\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \int\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)\cdot\nabla_1\nabla_1\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\mathrm{d}\tau_2 \qquad (1.182)$$

这里也是用对 x_2，y_2，z_2 的二阶导数来置换对 x_1，y_1，z_1 的二阶导数，将（1.182）按各分量[1]进行分部积分，因环

$$4\pi\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}|_x = \int\boldsymbol{c}(r_2)\cdot\nabla_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\mathrm{d}\tau_2$$

$$= \int\nabla_2\cdot\left[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\right]\mathrm{d}\tau_2$$

$$-\int\left[\nabla_2\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)\right]\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\mathrm{d}\tau_2 \qquad (1.183)$$

流密度 $\boldsymbol{c}$[2]是无源的，所以第 2 项变成 0。根据高斯定理，第一项的积分可改写成表面积分。为了使（1.167 b）的积分值存在，须让 $\boldsymbol{c}$ 只在空间的一定范围有值，或者是在很大 r 的范围里，远比 $1/r$ 更快地变成 0 的量。这时，（1.183）的第一

---

[1] 用这种办法避免了作出张量 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)\nabla_2$。

[2] $\boldsymbol{c}=\nabla\times\boldsymbol{V}$ 为已知量

项取足够的曲面进行积分时，变成 0。

因 $\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，所以（1.181）变成

$$\nabla\times\boldsymbol{V}=-\nabla^{2}\boldsymbol{A}=-\frac{1}{4\pi}\int\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_{2})\nabla_{1}^{2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\mathrm{d}\tau_{2}\quad(1.184)$$

用矢量环流密度 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)$ 去置换（1.171）里的标量 $s(\boldsymbol{r}_2)$ 时，则上式和（1.171）完全一样。和前面同理，作为便于积分的方法利用狄拉克的 δ 函数时，立即可知（1.184）变成（1.158）. 这就得到了，由开头假定的（1.166）所确定的 $\boldsymbol{V}$ 的形式和由（1.167 b）所确定的矢量势 $\boldsymbol{A}$ 的形式与确定 $\boldsymbol{V}$ 的旋度的（1.158）是一致的结果.

以上已经证得，阐明一个矢量能够分成无旋部分和无源部分的赫姆霍兹定理. 把这个定理应用于电磁场的话，则场的矢量 $\boldsymbol{V}$ 能够分解成由标量势求得的无旋电场和由矢量势 $\boldsymbol{A}$ 求得的无源的磁应强度 $\boldsymbol{B}$。密度 $s(\boldsymbol{r})$（除以介电常数ε）可以认为是电荷密度，环流密度$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r})$（乘以导磁系数）为电流密度。

习　　题

1.15.1 函数 $\psi(\boldsymbol{r})$(1)满足拉普拉斯方程，而且(2)满足完整的一组边界条件的话，则 $\psi(\boldsymbol{r})$唯一地确定，在这一节里默认了这一事实，试给以确切的证明。

1.15.2 (a)$\boldsymbol{P}$ 是泊松的矢量方程 $\nabla_{1}^{2}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}_1)=-\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1)$ 的解

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}_1)=\frac{1}{4\pi}\int_{V}\frac{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_2)}{r_{12}}\mathrm{d}\tau_{2}$$

时，通过证明 $\boldsymbol{V}$ 可写成

$$\boldsymbol{V}=-\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{P}$$

$$\varphi = \nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

来给出赫姆霍兹定理的另一证明。

(b) 解泊松的矢量方程，得

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2$$

试证明把这个解代入 (a) 的 φ 与 $\boldsymbol{A}$ 时，就得到在 1.15 节给出的代表 φ 与 $\boldsymbol{A}$ 的式子。

参考文献

KELLOGG,O.D., *Foundations of Potential Theory*,New York: Dover(1953).有关势论的经典教科书（1929 年第 1 版）LASS, H., *Vector and Tensor Analysis*, New York:McGraw-Hill (1950) .对矢量分析来讲最易懂的书之一，写得是一看就懂。

SCHWARTZ,M.,S.GREEN,W.A.RUTLEDGE, *Vector Analysis with Applicati-ons to Geometry and Physics*. New York: Harper and Row (1960)

有电磁学的丰富应用，对矢量分析的各基本问题写得很仔细。

WREDE, R, C., *Introduction to Vector and Tensor Analysis*.New York:Wiley (1963) .

具有关于历史的卓越的启蒙部分，对于矢量微分和力学上的 应用是一本优秀的书。

第2章 坐 标 系

在第1章我们只使用了笛卡儿坐标系。笛卡儿坐标系的特有优点是三个基矢到处是固定的。我们虽提出了径矢 $\boldsymbol{r}$，但毕竟是作为 x，y，z 的函数来处理的。遗憾的是，在求解物理问题当中，并不总是笛卡儿坐标系是最合适的。比如说，在万有引力或静电力的情形容易遇到的，也就是出现有心力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}_0F(r)$ 的问题当中笛卡儿坐标一般就不再适合。在这种问题当中，用径矢的长度作为一个坐标的坐标系，总之使用球坐标系是最恰当的。

总之对于解决问题最合适的坐标系，莫过于选择容易包括该问题的内在约束条件或对称性的坐标系。于是较之生硬地向笛卡儿坐标系里硬塞，更容易使问题得到解决的情况是屡见不鲜的。所谓"更容易得到解决"的意思是在新的坐标系里一个偏微分方程可分离成几个"标准型"的常微分方程。这种技巧一般叫做分离变数法，这在2.5节还要讨论。

下面专门来考察方程

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0 \tag{2.1}$$

可能分离变数的坐标系。(2.1)在外表上是更普遍的，当

$k^2=0$ 时	拉普拉斯方程
$k^2=$正的常量时	赫姆霍兹方程
$k^2=$负的常量时	扩散方程(的空间部分)
$k^2=$常量×动能时	薛定谔波动方程

有着各自的名称。(2.1)能够分离变数的坐标系有11种（L. P. Eisenhart, *Phys. Rev.* 45, 427 (1934)）。它

们都可以认为是共焦椭圆体坐标系的特殊情形。在这11种之外还有三种对于解拉普拉斯方程有用的坐标系。这些也要简单地涉及一些。

当然，为了使用非笛卡儿坐标系，也得付出一定的代价。比如说，必须知道在非笛卡儿坐标系里梯度，散度，旋度的表达式究竟如何。这些表达式在2.2节以极其一般的形式确定的，这里首先就14种坐标系都通用的曲线坐标系进行一般的讨论。

2.1 曲线坐标

在笛卡儿坐标系里，处理三种相互垂直的平面群：$x=$常量，$y=$常量，$z=$常量。现在考虑对这个空间叠加以另外三种面群。在各新的面群当中不要求面之间相互平行，它们也不一定必须是平面。三种面群虽没有必要相互垂直，为简单起见权且赋以条件（2.7）。在笛卡儿坐标系里任意点(x, y, z)可用三张平面的交点来表示。用$q_1=$常量，$q_2=$常量，$q_3=$常量来表示曲线坐标系的面群时，和用(x, y, z)规定点的位置相类似改用(q_1, q_2, q_3)来规定。这一事实，至少在原则上意味着有通过q_1，q_2，q_3决定x，y，z的关系

$$
\begin{aligned}
x &= x(q_1, q_2, q_3) \\
y &= y(q_1, q_2, q_3) \\
z &= z(q_1, q_2, q_3)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

或者相反的关系

$$
\begin{aligned}
q_1 &= q_1(x, y, z) \\
q_2 &= q_2(x, y, z) \\
q_3 &= q_3(x, y, z)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

对于各面群$q_i=$常量，在这个面的法线方向沿q_i的增加的指向取单位矢量。

极为接近的两点间距离的平方由

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \Sigma h_{ij}^2 dq_i dq_j \qquad (2.4)$$

确定。系数 h_{ij}^2 可认为决定坐标系（q_1，q_2，q_3）的性质。把这些系数归在一起叫做度规。下面来研究它，作为确定 h_{ij}^2 的第1阶段首先取（2.2）的微分

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}dq_3 \qquad (2.5)$$

对 dy，dz 也一样。把它们平方起来代入（2.4）时

$$h_{ij}^2 = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j} \qquad (2.6)$$

把话题局限于用相互垂直的曲面群构成的坐标系的情形，则

$$h_{ij} = 0, \quad i \neq j \qquad (2.7)$$

成立（参考习题2.1.1）．这里把符号简化写作 $h_{ii} = h_i$ 时，则有

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 \qquad (2.8)$$

在下一节以后，各个特定坐标系只要这些度规因子 h_1，h_2，h_3 一经确定就定下来了．相反，通过把一个 q_i 改变 dq_i，其它的 q 保持一定时的关系

$$ds_i = h_i dq_i \qquad (2.9)$$

不难决定度规因子．须注意这里的三个曲线坐标不一定必须是长度。度规因子 h_i 取决于 q_i 取什么，也不限于无量纲的量。但 $h_i dq_i$ 必须具有长度的量纲。

从（2.9）立即能得到面积元与体积元

$$d\sigma_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j \qquad (2.10)$$

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \qquad (2.11)$$

（2.10），（2.11）与变换公式（2.2）以及利用雅可比的结果当然是一致的。

习　题

2.1.1 对正交曲线坐标系来讲，试证明(2.7)$h_{ij}=0$，$i \neq j$。

2.1.2 对球坐标$q_1=r$，$q_2=\theta$，$q_3=\varphi$来讲，(2.2)的变换公式为

$$x=r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y=r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z=r\cos\theta$$

(a) 试计算球坐标的度规因子h_r，h_θ，h_φ。

(b) 根据$\mathrm{d}s_i=h_i\mathrm{d}q_i$的关系验证(a)的结果。

2.1.3 在静电学或流体力学里经常使用的$u-$，$\nu-$，$z-$坐标系由

$$xy=u$$

$$x^2-y^2=\nu$$

$$z=z$$

来定义。这个$u-$，$\nu-$，$z-$是正交系。

(a) 简单说明三组的坐标面的性质。

(b) 试画出$u=$常量的面，$\nu=$常量的面和xy面的交线的大概形状。

(c) 对整个四个象限来讲，试表示$\boldsymbol{u}_0$，$\boldsymbol{v}_0$的方向，指向。

(d) $u-$，$\nu-$，$z-$是右手系呢？还是左手系呢？

2.1.4 某二维系能用正交系q_1，q_2来描述。试证明雅可比为

$$J\left(\frac{x,y}{q_1,q_2}\right)=h_1h_2$$

这当然和(2.10)是一致的。

2.2 微分矢量算符

讨论曲线坐标的梯度，散度，旋度的出发点，是把梯度解释成具有最大空间变化率的大小与方向的矢量（参考1.6节）。根据这个解释，沿着垂直于面群：q_1 = 常量的方向的 $\nabla\psi(q_1, q_2, q_3)$ 的分量是使q_2和q_3保持一定，改变q_1时的变化率，故由

$$\nabla\psi|_1 = \frac{\partial\psi}{\partial s_1} = \frac{\partial\psi}{h_1\partial q_1} \tag{2.12}$$

确定[❶]，ds_1是沿q_1增加方向的无穷小位移的长度（参考式(2.9)）。为了表示这个方向在2.1节引入基本单位矢量$\boldsymbol{a}_1$。对q_2和q_3也反复利用(2.12)把它们作为矢量加起来时，则梯度为

$$\nabla\psi(q_1, q_2, q_3) = \boldsymbol{a}_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1} + \boldsymbol{a}_2\frac{\partial\psi}{\partial s_2} + \boldsymbol{a}_3\frac{\partial\psi}{\partial s_3}$$

$$= \boldsymbol{a}_1\frac{\partial\psi}{h_1\partial q_1} + \boldsymbol{a}_2\frac{\partial\psi}{h_2\partial q_2} + \boldsymbol{a}_3\frac{\partial\psi}{h_3\partial q_3} \tag{2.13}$$

从第1章所阐述的第2定义（式(1.91)），或从1.11节的高

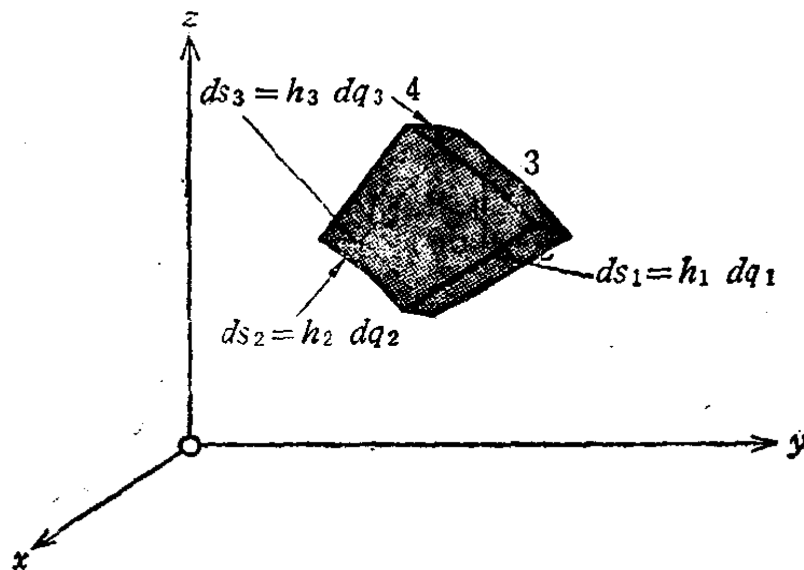


图 2.1 曲线坐标的体积元

❶这里用 ψ 表示函数是因为已经用 φ 表示方位角坐标，所以就不用 φ 表示函数。

斯定理都能得到散度算符。令无穷小体积元为$d\tau = h_1 h_2 h_3 \times \times dq_1 dq_2 dq_3$利用（1.91）则有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V}(q_1, q_2, q_3) = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\int d\tau} \tag{2.14}$$

请注意正方向的选择要使得（q_1，q_2，q_3）即（$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$）组成右手系。

由q_1 = 常量确定的两张面的面积分为

$$\left[V_1 h_2 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}(V_1 h_2 h_3) dq_1\right] dq_2 dq_3 - V_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3$$
$$= \frac{\partial}{\partial q_1}(V_1 h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3 \tag{2.15}$$

和在1.7节与1.10节得到的在形式上严格一致❶，加上有关其它两组面的同样结果，得

$$\int \boldsymbol{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3 h_1 h_2)\right] dq_1 dq_2 dq_3 \tag{2.16}$$

除以无穷小体积（式(2.14)），出现

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3 h_1 h_2)\right] \tag{2.17}$$

在（2.17）V_i是沿$\boldsymbol{a}_i$方向使q_i增加的指向上$\boldsymbol{V}$的分量，即$V_i = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{V}$。

让$\boldsymbol{V} = \nabla\psi(q_1, q_2, q_3)$，并用（2.13）和（2.17）则得拉普拉斯的表达式，结果是

---

❶因取dq_1、dq_2、$dq_3 \to 0$的极限，所以 2 阶以上高阶微分项不再出现。

$$\nabla\cdot\nabla\psi(q_1,q_2,q_3)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right] \tag{2.18a}$$

最后，为了求$\nabla\times\boldsymbol{V}$而应用斯托克斯定理（1.12节），和散度时一样取面积为无穷小的极限，一个分量一个分量来处理，考虑曲面：q_1 = 常量上的无穷小面积元．因

$$\int_s\nabla\times\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\nabla\times\boldsymbol{V}|_1h_2h_3dq_2dq_3 \tag{2.18b}$$

所以根据斯托克斯定理，有

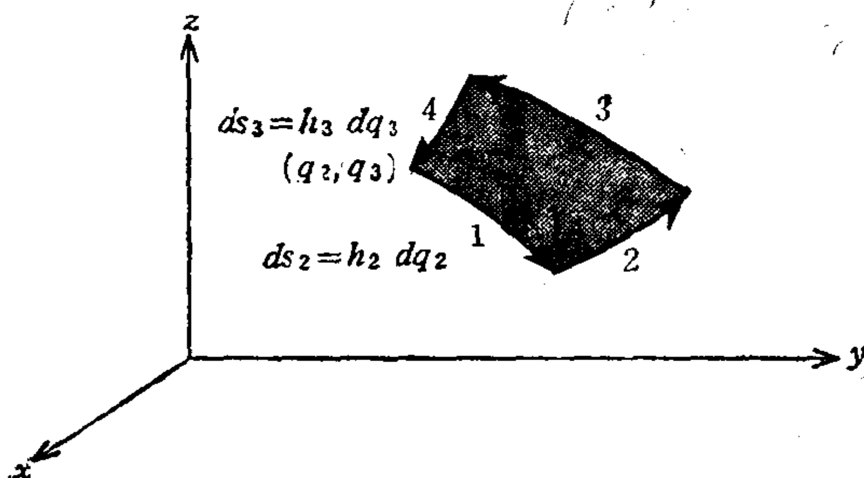


图 2.2 曲线坐标的面积元

$$\nabla\times\boldsymbol{V}|_1h_2h_3dq_2dq_3=\oint\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\lambda} \tag{2.19}$$

这里积分是在面q_1 = 常 量 上的封闭路径的线积分，沿着图2.2的封闭路径（1，2，3，4）有

$$\oint\boldsymbol{V}(q_1,q_2,q_3)\cdot d\boldsymbol{\lambda}=V_2h_2dq_2+\left[V_3h_3+\frac{\partial}{\partial q_2}(V_3h_3)dq_2\right]\times dq_3-\left[V_2h_2+\frac{\partial}{\partial q_3}(V_2h_2)dq_3\right]dq_2-V_3h_3dq_3$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2 V_2)\right] dq_2 dq_3 \qquad (2.20)$$

但在 1 与 2 部分由于向正方向前进，故取了正号，在 3 与 4 部分由于向负方向前进，故取了负号。根据（2.19）有

$$\nabla \times \boldsymbol{V}|_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2 V_2)\right] \qquad (2.21)$$

循环改变角标的话，就能得到$\nabla \times \boldsymbol{V}$的其余两个分量。如在第1章所做的那样，把旋度写成行列式的形式：

$$\nabla \times \boldsymbol{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 h_1 & \boldsymbol{a}_2 h_2 & \boldsymbol{a}_3 h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix} \qquad (2.22)$$

会带来许多方便。

到这里终于把∇，$\nabla\cdot$，$\nabla\times$，以及拉普拉斯∇^2都用曲线坐标系表示出来。在已准备好这些一般公式的基础之上，再来进一步研究，（2.1）对于$k^2 \neq 0$也能进行分离变数的（参考2.5节）11种坐标系，以及三种特殊坐标系（二极坐标，圆环面坐标，双球面坐标）。

习　　题

2.2.1 让沿着 q_1 增加方向的单位矢量为$\boldsymbol{a}_1$，试证明下列各式是成立的。

(a) $\nabla\cdot\boldsymbol{a}_1 = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\dfrac{\partial(h_2 h_3)}{\partial q_1}$

(b) $\nabla\times\boldsymbol{a}_1 = \dfrac{1}{h_1}\left[\boldsymbol{a}_2\dfrac{\partial h_1}{h_3\partial q_3} - \boldsymbol{a}_3\dfrac{\partial h_1}{h_2\partial q_2}\right]$

2.2.2 试证明正交基矢 $\boldsymbol{a}_i$ 能用

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \tag{a}$$

来定义。特别是证明 从 $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i = 1$ 能推导出对于 h_i 和 (2.6) 一致的表达式。

上记式 (a) 能用作推导

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial q_j} = \boldsymbol{a}_j \frac{\partial h_j}{h_i \partial q_i}, \quad i \neq j$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial q_i} = -\sum_{i \neq j} \boldsymbol{a}_j \frac{\partial h_i}{h_j \partial q_j}$$

的出发点。

2.2.3 试讨论通常的(不包含∇)内积和外积和在笛卡儿坐标里一样在曲线坐标里也可以不用度规因子就写出来。

2.2.4 试直接应用式 (1.90)

$$\nabla \psi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \psi d\boldsymbol{\sigma}}{\int d\tau}$$

推导出

$$\nabla \psi = \boldsymbol{a}_1 \frac{\partial \psi}{h_1 \partial q_1} + \boldsymbol{a}_2 \frac{\partial \psi}{h_2 \partial q_2} + \boldsymbol{a}_3 \frac{\partial \psi}{h_3 \partial q_3}$$

提示：计算面积分时会出现$\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial q_1}(\boldsymbol{a}_1 h_2 h_3)$那样的项，习题2.2.2举出的结果会有用的。

2.3 特殊坐标系——笛卡儿直角坐标系

我们强调过究竟取什么坐标系，取决于要解决的问题的固有约束或对称性条件。把以后要处理的14个坐标系归纳成一个表，把它们按是否有（垂直于平行平面群的）平移轴，或者是否有旋转对称轴来进行分类较为方便。

在表 2.1 里总共写有15个坐标系的名称——圆柱坐标系因有平移轴同时还有旋转对称轴，所以它是重复出现的。因

表 2.1

平移轴	旋转轴	无对称轴
笛卡儿（三个轴）		共焦椭圆体
圆柱	圆柱	
	球（三个轴）	
椭圆柱	长球面	
	扁球面	
抛物柱	旋转抛物面	
二极	圆环面	
	双球面	
		锥面
		共焦抛物面

此，实际共有14个坐标系。

表中的排列表示各种坐标系之间的关系。考虑有平移轴的系（左端的列）里二维的面（$z=0$），使它围绕镜象对称轴进行旋转时立刻产生写在它右边（当中的列）的坐标系。比如说，使椭圆柱坐标系的（$z=0$）的面围绕长轴进行旋转时就产生长球面坐标，围绕短轴进行旋转时就产生扁球面坐标系。

既无平移轴也无旋转轴的坐标系有三种。值得注意的是在这种非对称的一群里经常认为共焦椭圆柱坐标系是最一般的坐标系，而其它坐标系几乎都是由它引出来的。

笛卡儿直角坐标系　第1章的讨论是以这种笛卡儿坐标系为基础的。这种在所有坐标系中是最简单的系，有

$$
\begin{aligned}
h_1 &= h_x = 1 \\
h_2 &= h_y = 1 \\
h_3 &= h_z = 1
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

坐标面群是三组平行面群：$x=$常量，$y=$常量，$z=$常量。笛卡儿坐标系唯一独特的一点是它的所有的 h_i 是常量。在第3章里处理张量时这个性质是缺少不得的优点。另外，还

得注意一点基矢$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$即$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$都具有固定的方向。

由（2.13），（2.17），（2.18），（2.22）各式能再现第1章的结果

$$\nabla\psi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{2.24}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{2.25}$$

$$\nabla\cdot\nabla\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{2.26}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{V}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix} \tag{2.27}$$

2.4 球坐标（r，θ，φ）

把（q_1，q_2，q_3）改写为（r，θ，φ）时，球坐标系如下组成

1. 以原点为中心的同心球

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=\text{常量}$$

2. 以z轴为中心轴，以原点为顶点的直圆锥。

$$\theta=\arccos\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=\text{常量}$$

3. 通过z轴的半平面

$$\varphi=\arctan\frac{y}{x}=\text{常量}$$

无顶角θ，方位角φ的定义虽有任意选择的余地，一般把z轴作为特殊选定的轴来定义的。相当于（2.2）的变换式为

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi \\
y &= r\sin\theta\sin\varphi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

但θ是由z轴的正方向开始测，φ是在xy平面内由x轴的正方向开始测。变数的范围是$0\leqslant r<\infty$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$。由（2.6）

$$
\begin{aligned}
h_1 &= h_r = 1 \\
h_2 &= h_\theta = r \\
h_3 &= h_\varphi = r\sin\theta
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

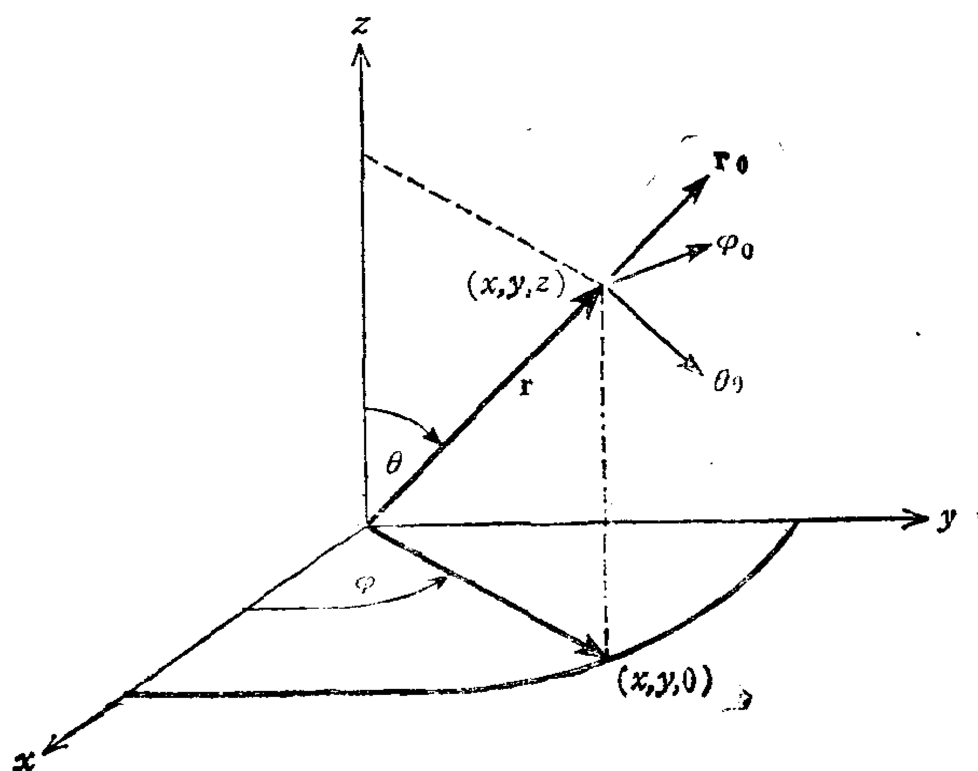


图 2.3 球坐标

必须强调指出r_0，θ_0，φ_0，随着θ,φ的变化，方向是变化的。利用方向是固定的笛卡儿系的基矢来写的话，

$$
\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{i}\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{k}\cos\theta
$$

$$
\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{i}\cos\theta\cos\varphi + \boldsymbol{j}\cos\theta\sin\varphi - \boldsymbol{k}\sin\theta
$$

$$\varphi_0 = -\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi$$

把曲线坐标系的基矢$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$改写为$\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{\theta}_0$，$\boldsymbol{\varphi}_0$时，由2.2节可得

$$\nabla = \boldsymbol{r}_0\frac{\partial\psi}{\partial r} + \boldsymbol{\theta}_0\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \boldsymbol{\varphi}_0\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \tag{2.30}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + r\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right] \tag{2.31}$$

$$\nabla\cdot\nabla\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right] \tag{2.32}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_0 & r\boldsymbol{\theta}_0 & r\sin\theta\boldsymbol{\varphi}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ V_r & rV_\theta & r\sin\theta V_\varphi \end{vmatrix} \tag{2.33}$$

在球坐标里经常需要矢量拉普拉斯$\nabla^2\boldsymbol{V}$。使用第1章的矢量恒等式（1.80）时能很迅速地求出它的表达式，为了便于以后的参考起见把它的表达式列举如下。

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{V}|_r = &\left(-\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right.\\ &\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)V_r + \left(-\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin\theta}\right)V_\theta\\ &+\left(-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)V_\varphi\\ = &\nabla^2V_r - \frac{2}{r^2}V_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin\theta}V_\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{V}|_\theta = \nabla^2 V_\theta - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}V_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} \tag{2.35}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{V}|_\varphi = \nabla^2 V_\varphi - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}V_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta\partial V_\theta}{r^2\sin^2\theta\partial\varphi} \tag{2.36}$$

作为$\nabla^2\boldsymbol{V}$的分量的这些表达式尽管非常复杂，但有时还是必需的。自然界并不保证经常是简单的。

例题 2.4.1

如果使用从（2.30）到（2.33）的式子时，那么在第1章经过繁琐的办法得到的若干结果，立刻就会明白。

由（2.30），有

$$\nabla f(r) = \boldsymbol{r}_0\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \tag{2.37}$$

$$\nabla r^n = \boldsymbol{r}_0 n r^{n-1}$$

由（2.31），有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}_0 f(r) = \frac{2}{r}f(r) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \tag{2.38}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}_0 r^n = (n+2)r^{n-1}$$

由（2.32），有

$$\nabla^2 f(r) = \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} \tag{2.39}$$

$$\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2} \tag{2.40}$$

最后由（2.33），有

$$\nabla\times\boldsymbol{r}_0 f(r) = 0 \tag{2.41a}$$

例题 2.4.2

要计算xy面内一个圆电流所建立的矢量势，就必须研究

$$\boldsymbol{V} = \nabla\times[\nabla\times\boldsymbol{\varphi}_0 A_\varphi(r,\theta)] \tag{2.41b}$$

在球坐标里，它有

$$V=\nabla\times\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_0 & r\boldsymbol{\theta}_0 & r\sin\theta\boldsymbol{\varphi}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & 0 & r\sin\theta A_\varphi(r,\theta) \end{vmatrix}$$

$$=\nabla\times\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\boldsymbol{r}_0\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\varphi)-r\boldsymbol{\theta}_0\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi)\right]$$

(2.41c)

取第 2 次旋度

$$V=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_0 & r\boldsymbol{\theta}_0 & r\sin\theta\boldsymbol{\varphi}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{1}{r^2\sin\theta}(r\sin\theta A_\varphi) & -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi) & 0 \end{vmatrix}$$

(2.41d)

把行列式展开之

$$V=-\boldsymbol{\varphi}_0\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA_\varphi)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi)\right]\right\}$$

$$=-\boldsymbol{\varphi}_0\left[\nabla^2A_\varphi(r,\theta)-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\varphi(r,\theta)\right]$$

由V推导缔合勒襄特方程，并会知道 A_φ 由缔合勒襄特多项式的级数确定。

习　　题

2.4.1 试把球坐标系的基矢分解成笛卡儿分量

$$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{i}\sin\theta\cos\varphi+\boldsymbol{j}\sin\theta\sin\varphi+\boldsymbol{k}\cos\theta$$

$$\boldsymbol{\theta}_0=\boldsymbol{i}\cos\theta\cos\varphi+\boldsymbol{j}\cos\theta\sin\varphi-\boldsymbol{k}\sin\theta$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0=-\boldsymbol{i}\sin\varphi+\boldsymbol{j}\cos\varphi$$

2.4.2 (a) 从前题结果把$\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{\theta}_0$，$\boldsymbol{\varphi}_0$的偏导数表示出来。

(b) 已知∇（最大空间变化率）由

$$\boldsymbol{r}_0\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{\theta}_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{\varphi}_0\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\theta}{\partial\varphi}$$

确定，试利用（a）的结果计算$\nabla\cdot\nabla\psi$。这是推导拉普拉斯的另一方法。

2.4.3 试将笛卡儿系的基矢分解为球坐标分量

$$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{r}_0\sin\theta\cos\varphi+\boldsymbol{\theta}_0\cos\theta\cos\varphi-\boldsymbol{\varphi}_0\sin\varphi$$

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{r}_0\sin\theta\sin\varphi+\boldsymbol{\theta}_0\cos\theta\sin\varphi+\boldsymbol{\varphi}_0\cos\varphi$$

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{r}_0\cos\theta-\boldsymbol{\theta}_0\sin\theta$$

2.4.4 两个矢量的方向分别由角θ_1，φ_1及θ_2，φ_2确定。两个矢量的夹角γ的余弦由

$$\cos\gamma=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)。$$

2.4.5 矢量$\boldsymbol{V}$与某球面相切，$\boldsymbol{V}$的旋度沿着半径方向。根据这一事实，关于$\boldsymbol{V}$的球坐标分量对r的依赖关系能说些什么呢？

2.4.6 在近代物理学中，十分重视反演性——随着坐标系的反演某量是否不变，符号是否变。

(a) 对于固定的轴x，y，z试证明点(r,θ,φ)的反演，由

$$r\rightarrow r$$

$$\theta\rightarrow\pi-\theta$$

$$\varphi\rightarrow\pi+\varphi$$

的变换组成。

(b) 试证明$\boldsymbol{r}_0$与$\boldsymbol{\varphi}_0$具有奇字称（方向相反），$\boldsymbol{\theta}_0$具有偶字称。

2.4.7 从（1.72）使用笛卡儿坐标已知

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\omega}$$

试用球坐标证明这一结果。用并矢式的语言来讲(3.5

节）∇r 是并矢因子，即单位并矢式。

2.4.8 粒子在空间里运动时，试求其速度与加速度的球坐标分量。

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}$$
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2$$
$$a_\varphi = r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

提示：$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0(t)r(t)$
$$= [\boldsymbol{i}\sin\theta(t)\cos\varphi(t) + \boldsymbol{j}\sin\theta(t)\sin\varphi(t) + \boldsymbol{k}\cos\theta(t)]r(t)$$

注意：使用拉格朗日方法时，能更巧妙地求出这些结果。r 上面的点代表对时间求导数，即 $\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$。最早使用这个符号的是牛顿。

2.4.9 粒子 m 在有心力作用下的运动遵从牛顿第二定律

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_0 f(r)$$

$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{c} =$ 常矢量，试阐明从几何上进行解释时能推导出开普勒第二定律。

2.4.10 试用球坐标表示$\partial/\partial x$，$\partial/\partial y$，$\partial/\partial z$。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\cos\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\sin\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

提示：令 ∇_{xyz} 与 $\nabla_{r\theta\varphi}$ 相等。

2.4.11 从前题试证明下式

$$-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=-i\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

这是对应于角动量的 z 分量的量子力学算符。

2.4.12 根据用 $\boldsymbol{L}=-i(\boldsymbol{r}\times\nabla)$定义的量子力学角动量算符来证明下列各式

(a) $$L_x+iL_y=e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

(b) $$L_x-iL_y=-e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

这些可成为升降算符。

2.4.13 在球坐标里试证明 $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}=i\boldsymbol{L}$。其中$\boldsymbol{L}=-i(\boldsymbol{r}\times\nabla)$是量子力学的角动量算符。

提示：对 $\boldsymbol{L}$ 考虑球坐标，对矢量积考虑笛卡儿分量。

2.4.14 让 $\boldsymbol{L}=-i\boldsymbol{r}\times\nabla$试证明下列恒等式。

(a) $$\nabla=\boldsymbol{r}_0\frac{\partial}{\partial r}-i\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{L}}{r^2}$$

(b) $$\boldsymbol{r}\nabla^2-\nabla\left(1+r\frac{\partial}{\partial r}\right)=i\nabla\times\boldsymbol{L}$$

后面的恒等式对于联系角动量和勒襄特方程是有用的。

2.4.15 试证明 $\nabla^2\psi(r)$的下列三种形式是等效的。

(a) $$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}\psi(r)}{\mathrm{d}r}\right]$$

(b) $$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}[r\psi(r)]$$

(c) $$\frac{\mathrm{d}^2\psi(r)}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\psi(r)}{\mathrm{d}r}$$

对某问题用球坐标的描述和用笛卡儿坐标的描述之间要建立对应的话是特别方便的。

2.4.16 在某日冕模型里假定热流的稳定方程

$$\nabla\cdot(\kappa\nabla T)=0$$

成立。其中 κ 为热传导系数与 $T^{5/2}$ 成正比。假定温度 T 与 r^n 成正比时，试证明热流方程满足 $T=T_0(r_0/r)^{2/7}$。

2.4.17 某力场（在球坐标）由

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}_0\frac{2P\cos\theta}{r^3}+\boldsymbol{\theta}_0\frac{P}{r^3}\sin\theta,\quad r\geqslant P/2$$

确定

(a) 对 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 进行分析然后判断势是否存在。

(b) 试就 $\theta=\pi/2$ 面上的单位圆计算 $\oint\boldsymbol{F}\cdot d\lambda$，对于力是保守力还是非保守力，这个积分值有何表现。

(c) 如果认为 $\boldsymbol{F}$ 由 $\boldsymbol{F}=-\nabla\psi$ 来描述时，试求出那个 ψ。否则的话，不存在可以接受的势，试简单说明之。

2.4.18 (a) 试证明 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\varphi}_0(\cot\theta/r)$ 是 $\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}_0/r^2$ 的解。

(b) 试证明这个球坐标的解，和习题1.13.5 所确定的解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}\frac{yz}{r(x^2+y^2)}-\boldsymbol{j}\frac{xz}{r(x^2+y^2)}$$

是一致的。须注意对应于 x，$y=0$ 对 $\theta=0$，π 这个解是发散的。

(c) 最后，证明 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\theta}_0\varphi\sin\theta/r$ 是解。须注意这个解（$r\neq0$ 时）虽不发散，但对所有可能方位角已不再是单值的。

2.4.19 已知磁矢量势由

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

确定，试由此推导出偶极矩为 $\boldsymbol{m}$ 的磁偶极子所产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$

答对于 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{k}m$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m\cos\theta}{r^3} + \boldsymbol{\theta}_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m\sin\theta}{r^3}$$

2.4.20 在离辐射源很远处，电偶极子辐射的电磁场为

$$\boldsymbol{E} = a_E \sin\theta \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \boldsymbol{\theta}_0 \quad \boldsymbol{B} = a_B \sin\theta \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \boldsymbol{\varphi}_0$$

试证明当取 $a_E/a_B = \omega/k = c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ 时，则麦克斯韦方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

会被满足。

提示：因 r 很大，故 r^{-2} 程度的项可忽略不计。

2.5 分离变数

在笛卡儿坐标里利用对于拉普拉斯的（2.26）则赫姆霍兹方程（2.1）成为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0 \tag{2.42}$$

眼前把 k^2 当作常量。处理（2.42）这样偏微分方程最简单的方法，是把它分离成一系列的常微分方程，

令
$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2.43}$$

并代入（2.42），问题是如何知道（2.43）是成立的？回答很简单，实际上它是否成立是不知道的。在这里采取的办法是先做做看，然后看是否能顺利地做下去，如果这种尝试成功的话就说明（2.43）是正确的。如果不成功问题也有头绪了，这时再来试用其它方

法，比如格林函数或积分变换或强行数值分析。假定ψ由(2.43)确定的话，则(2.42)成为

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2}+XZ\frac{d^2Y}{dy^2}+XY\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2XYZ=0 \quad (2.44)$$

两边除以$\psi=XYZ$，进行移项，则得

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k^2-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \quad (2.45)$$

(2.45)代表一种分离变数。左边只是x的函数。一方面右边只依赖于y和z。于是(2.45)是一种佯谬。x的函数等于y，z的函数，然而x，y，z都是相互独立的坐标。独立的意思是意味着，作为独立变数x的动作不左右于y或z。通过两边等于某常量(分离常数)来解决这一佯谬。于是令[❶]

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-l^2 \quad (2.46)$$

$$-k^2-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{1}{Z}\frac{dZ^2}{dz^2}=-l^2 \quad (2.47)$$

现在把注意力转向(2.47)

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-k^2+l^2-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \quad (2.48)$$

于是可能再来一次分离变数。即这里是把y的函数和z的函数进行等置，出现和前面相同的佯谬。和前面一样的做法，让两边再等于一个分离变数$-m^2$使得佯谬得到解决。

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-m^2 \quad (2.49)$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k^2+l^2+m^2=-n^2 \quad (2.50a)$$

---

❶符号的选择完全是任意的。在各种问题里按着能满足各边界条件的要求来决定。

这里为了获得对称的方程组，通过$k^2=l^2+m^2+n^2$引入新的常数n^2.现在得到三个常微分方程以代替原有方程（2.42）。假定（2.43）是成功的，从而达到了预期的目的。

解可由选定常数l，m，n来进行分类。即

$$\psi_{lmn}(x,\ y,\ z)=X_l(x)Y_m(y)Z_n(z) \qquad (2.50b)$$

在与求解问题的条件以及$k^2=l^2+m^2+n^2$的条件不发生矛盾的范围内l，m，n可任意选择。$X_l(x)$是（2.46）的解，另外Y，Z也这样的话则（2.50a）仍是（2.1）的解。解ψ_{lmn}的线性组合取

$$\Psi=\sum_{l,m,n}a_{lmn}\psi_{lmn} \qquad (2.50c)$$

能得到（2.1）的最普遍的解。常系数a_{lmn}，最终要选得使Ψ满足问题的边界条件。

怎样做才是可能的呢？写成（2.25b）为什么是对的？理由就在于∇^2+k^2是线性算符（微分）。线性算符$\mathscr{L}$定义为有下列两种性质的算符即a为常量

$$\mathscr{L}(a\psi)=a\mathscr{L}\psi$$

以及

$$\mathscr{L}(\psi_1+\psi_2)=\mathscr{L}\psi_1+\mathscr{L}\psi_2$$

把这些性质归纳起来可以说，线性方程的解的任意线性组合仍是解。由它的具体形式可看出∇^2+k^2具有上述两个性质（因而是线性算符）。那时直接应用这种定义的两个性质能推导出（2.50b）❶。

须注意进一步的推广。现在介绍的分离变数的手续在

$$k^2=f(x)+g(y)+h(z)+k'^2 \qquad (2.50d)$$

的情况仍照样能进行，但k'^2为新的常量。

❶在量子力学里，物理量能用无穷维的复希尔柏特空间的线性算符来表示，所以线性算符特别重要。

在这种情况下只不过是代替（2.46）会出现

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+f(x)=-l^2 \tag{2.50e}$$

作为解的X，Y，Z虽和以前$k^2=$常量的情况有所不同，但分离偏微分方程，取其解的线性组合的技巧仍完全一样。读者也许觉得有些诧异，目前究竟在做什么，这里不过是为了说明这种坐标系的实用程度介绍了偏微分方程分离变数的技巧，随之会面临常微分方程的解法。

再回到k^2是常量的情形，试行利用球坐标来进行分离。使用（2.32），能得到

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]$$
$$=-k^2\psi \tag{2.51}$$

试用

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{2.52}$$

把它代入（2.51）再除以$R\Theta\Phi$，得

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{1}{\Phi r^2\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}$$
$$=-k^2 \tag{2.53}$$

请注意这里出现的微分都不是偏微分而是常微分。两边乘以$r^2\sin^2\theta$时能够分离$(1/\Phi)(\mathrm{d}^2\Phi/\mathrm{d}\varphi^2)$的项，得

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=r^2\sin^2\theta\left[-k^2-\frac{1}{r^2R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{r^2\sin\theta\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)\right] \tag{2.54}$$

（2.54）是将只是φ的函数和只是r、θ的函数进行等置的。因r，θ，φ是独立变数，所以可让两边分别等于常量。在这

里动了一下脑筋使以后的分析就轻松了许多。在物理学问题里，大多数情形 φ 作为方位角而出现。根据这一事实可以想象 φ 也许是周期解而不是指数函数。把这个事实放在心头，把 $-m^2$ 作为分离变数来使用。当然常量完全是可以任意取的，可是这样做，事情变得容易得多。

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} = -m^2 \tag{2.55}$$

$$\frac{1}{r^2R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta} = -k^2 \tag{2.56}$$

(2.56) 乘以 r^2 并整理各项，可得

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + r^2k^2 = -\frac{1}{\sin\theta\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \tag{2.57}$$

再一次分离变数。让两边分别等于常量 Q，结果得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta + Q\Theta = 0 \tag{2.58}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + k^2R - \frac{QR}{r^2} = 0 \tag{2.59}$$

这里又一次把三个变数的偏微分方程换成了三个常微分方程。这些常微分方程的解，表明 (2.58) 是缔合勒襄特方程。于是 Q 是 $l(l+1)$，l 是整数。

现在把最一般的解可写成

$$\psi_{Qm}(r,\ \theta,\ \varphi) = \sum_{Q\cdot m} R_Q(r)\Theta_{Qm}(\theta)\Phi_m(\varphi) \tag{2.60a}$$

还有无须限定 k^2 是常量的麻烦情况。则分离变数手续如

$$k^2 = f(r) + \frac{1}{r^2}g(\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\varphi) + k'^2 \tag{2.60b}$$

那样对更普遍的k^2仍是可能的。以封闭形式能得到解的薛定谔方程的最重要的例子之一，是在氢原子问题里$k^2=f(r)$．对氢原子来讲（2.59）成为缔合拉盖尔方程。4.2节还要讨论。下面回到研究各个坐标系。

习　　题

2.5.1 通过把算符作用于一般形式$a_1\psi(x, y, z)+a_2\psi_2(x, y, z)$证明它是线性的。即$(\nabla+k^2)(a_1\psi_1+a_2\psi_2)=a_1(\nabla^2+k^2)\psi_1+a_2(\nabla^2+k^2)\psi_2$是成立的。

2.5.2 试证明

$$\nabla^2\psi(r, \theta, \varphi)+\left[k^2+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\varphi)\right]\psi(r, \theta, \varphi)=0$$

（在球坐标）分离变数是可能的。函数f，g，h分别只是表示它的变数的函数，k^2为常量。

2.5.3 一个微观粒子（量子力学的），在棱长为a，b，c的矩形的箱中。粒子由满足薛定谔波动方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi=E\psi$$

的波函数ψ来描述，要求波函数在箱的壁面上为0（但在箱内不恒等于0）．由于这一条件的缘故要对分离变数直至能量E赋以限制．能得这种解的E的最小值如何？

答　$E=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$

2.6 圆柱坐标(ρ, φ, z)

由图2.4，得变换关系

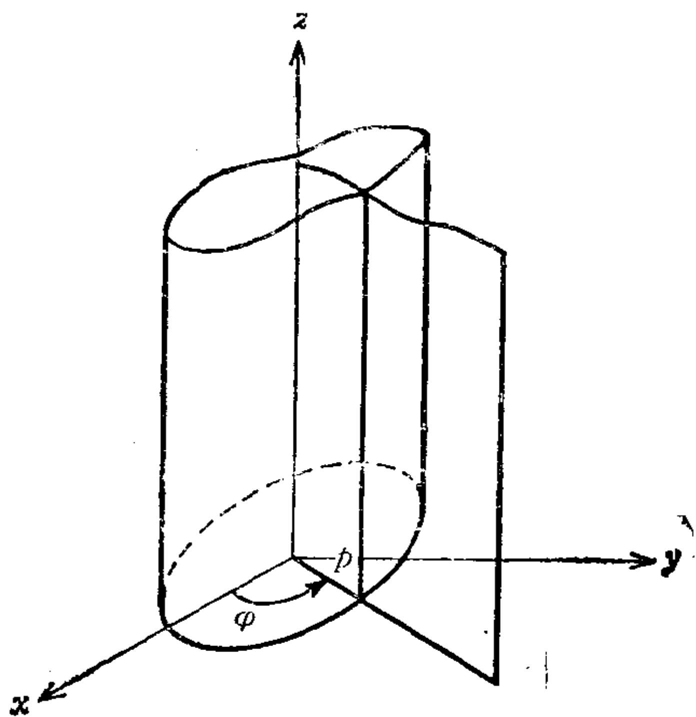


图 2.4 圆柱坐标

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos\varphi \\
y &= \rho\sin\varphi \\
z &= z
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

对于离开 z 轴的垂直距离使用 ρ，重温一下所谓 r 这个字母是用来表示离开原点的距离，根据上述关系，考虑某微小线元，则度规因子为

$$
\begin{aligned}
h_1 &= h_\rho = 1 \\
h_2 &= h_\varphi = \rho \\
h_3 &= h_z = 1
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

图2.4所示的坐标面如下组成

1. 具有以 z 轴为共通轴的直圆筒

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = 常量$$

2. 通过 z 轴的半平面

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 常量$$

3．和笛卡儿系一样平行于 xy 面的平面

$$z = 常量$$

ρ，φ，z的范围是

$$0 \leqslant \rho < \infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < \infty$$

由（2.13），（2.17），（2.18），（2.22）各式

$$\nabla\psi(\rho,\varphi,z) = \boldsymbol{\rho}_0\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \boldsymbol{\varphi}_0\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{2.63}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{2.64}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{2.65}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{V} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{\rho}_0 & \rho\boldsymbol{\varphi}_0 & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix} \tag{2.66}$$

最后，为了解决圆形波导管或圆筒形空腔谐振器问题用圆柱坐标分解矢量拉普拉斯 $\nabla^2\boldsymbol{V}$ 时

$$\nabla^2\boldsymbol{V}|_\rho = \nabla^2 V_\rho - \frac{1}{\rho^2}V_\rho - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{V}|_\varphi = \nabla^2 V_\varphi - \frac{1}{\rho^2}V_\varphi + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi} \tag{2.67}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{V}|_z = \nabla^2 V_z$$

z 分量所以具有非常简单的形式的根本原因是 z 轴是笛卡儿轴，即

$$\nabla^2\ (\boldsymbol{\rho}_0 V_\rho + \boldsymbol{\varphi}_0 V_\varphi + \boldsymbol{k}V_z) = \nabla^2(\boldsymbol{\rho}_0 V_\rho + \boldsymbol{\varphi}_0 V_\varphi) + \boldsymbol{k}\nabla^2 V_z$$

$$= \rho_0 f(V_\rho, V_\varphi) + \varphi_0 g(V_\rho, V_\varphi) + + k\nabla^2 V_z$$

算符 ∇^2 作用于基矢 ρ_0，φ_0 仍在 ρ_0，φ_0 面内。这个性质在这种筒型坐标系里仍是成立的。

例题2.6.1 圆筒形谐振腔

考虑具有理想导体壁的圆筒形空腔（半径为 a）．电磁波在这种空腔中振动．现在假定电磁场按 $e^{-i\omega t}$ 随时间变化时，则麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\nabla\times \boldsymbol{E} = \omega^2\varepsilon_0\mu_0 \boldsymbol{E} \text{（参考例题1.9.2）} \qquad (2.68)$$

因 $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$（真空中，无电荷），故有

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \alpha^2 \boldsymbol{E} = 0$$

其中 ∇^2 为拉普拉斯，$\alpha^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$。在圆柱坐标里，$E_z$ 被分离并满足标量赫姆霍兹方程

$$\nabla^2 E_z + \alpha^2 E_z = 0 \qquad (2.69)$$

遵从边界条件 $E_z(\rho = a) = 0$。

利用（2.65），（2.69）时，有

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{dE_z}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \alpha^2 E_z = 0 \qquad (2.70)$$

这里试用 $E_z(\rho,\varphi,z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ 时，得

$$\frac{1}{P\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right) + \frac{1}{\Phi\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + \alpha^2 = 0 \qquad (2.71)$$

利用分离变数 $-k^2$ 把对 z 的依赖性分离出来，

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2$$

在目前的空腔问题里 $\sin kz$ 和 $\cos kz$ 是（选得在空腔端部适合边界条件）适当的解。对波导管（行波）来讲也许指数函数更为合适。

使用 $\gamma^2 = \alpha^2 - k^2$ 两边乘以 ρ^2 则对 φ 的依赖性被分离出

来。设

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2$$

则解为 $\Phi(\varphi)=e^{\pm im\varphi}$, $\sin m\varphi$, $\cos m\varphi$。于是剩下的对 ρ 的依赖性是

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right)+(\gamma^2\rho^2-m^2)P=0 \tag{2.72}$$

这是贝塞尔方程。这个例题与贝塞尔函数有关。

习　题

2.6.1 试将圆柱坐标系的基矢分解为笛卡儿分量

$$\boldsymbol{\rho}_0=\boldsymbol{i}\cos\varphi+\boldsymbol{j}\sin\varphi$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0=-\boldsymbol{i}\sin\varphi+\boldsymbol{j}\cos\varphi$$

$$\boldsymbol{k}_0=\boldsymbol{k}$$

2.6.2 试将笛卡儿坐标系的基矢分解为圆柱坐标分量。

$$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{\rho}_0\cos\varphi-\boldsymbol{\varphi}_0\sin\varphi$$

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{\rho}_0\sin\varphi+\boldsymbol{\varphi}_0\cos\varphi$$

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_0$$

2.6.3 粒子在空间里运动着，试求出速度和加速度的圆柱坐标分量。

$$v_\rho=\dot{\rho}\qquad a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2$$

$$v_\varphi=\rho\dot{\varphi}\qquad a_\varphi=\rho\ddot{\psi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi}$$

$$v_z=\dot{z}\qquad a_z=\ddot{z}$$

提示：$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{\rho}_0(t)\rho(t)+\boldsymbol{k}z(t)$

$$=[\boldsymbol{i}\cos\varphi(t)+\boldsymbol{j}\sin\varphi(t)]\rho(t)+\boldsymbol{k}z(t)$$

注意：$\dot{\rho}=d\rho/dt$, $\ddot{\rho}=d^2\rho/dt^2$ 等等。

2.6.4 试证明赫姆霍兹方程

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

即使把 k^2 推广到 $k^2 + f(\rho) + (1/\rho^2)g(\varphi) + h(z)$ 的形式仍能用圆柱坐标进行分离变数。

2.6.5 当 $\psi = \psi(\rho)$ 时，试用圆柱坐标解拉普拉斯方程 $\nabla^2\psi = 0$。

答 $\psi = k\ln\dfrac{\rho}{\rho_0}$

2.6.6 某矢量函数在直圆柱坐标系里由

$$\boldsymbol{V}(\rho, \varphi) = \boldsymbol{\rho}_0 V_\rho(\rho, \varphi) + \boldsymbol{\varphi}_0 V_\varphi(\rho, \varphi)$$

确定。试证明 $\nabla \times \boldsymbol{V}$ 只有 z 分量。须注意，对于包含在面：$q_3 =$ 常量内的任意矢量，只要乘积 h_1V_1 和 h_2V_2 都不依赖于 q_3，这个结果就是对的。

2.6.7 沿 z 轴放置的流有电流 I 的金属线。结果产生的磁矢量势由

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{k}\frac{\mu I}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

确定。试证明磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 由

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\varphi}_0\frac{\mu I}{2\pi\rho}$$

确定。

2.6.8 某力用

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{i}\frac{y}{x^2 + y^2} + \boldsymbol{j}\frac{x}{x^2 + y^2}$$

描述

(a) 试用圆柱坐标表示 $\boldsymbol{F}$。

对于下面的 (b)，(c) 也用圆柱坐标

(b) 试计算 $\boldsymbol{F}$ 的旋度

(c) 在单位圆上逆时针旋转一周时，计算 $\boldsymbol{F}$ 所作的

功。

(d) 如何把(b)的结果和(c)的结果进行统一的解释。

2.6.9 同轴波导管内的横(模式)电磁波(TEM)具有电场$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\rho,\ \varphi)e^{i(kz-\omega t)}$，磁感应强度$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\rho,\ \varphi)e^{i(kz-\omega t)}$。因波是横波所以$\boldsymbol{E}$也好$\boldsymbol{B}$也好都没有$z$分量。两方面的场都满足矢量拉普拉斯方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\rho,\ \varphi)=0$$

$$\nabla^2\boldsymbol{B}(\rho,\ \varphi)=0$$

(a) 试证明$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\rho}_0E_0(a/\rho)e^{i(kz-\omega t)}$和$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\varphi}_0B_0(a/\rho)e^{i(kz-\omega t)}$是解。其中$a$是内侧的导体的半径。

(b) 假定波导管内是真空的。让

$$B_0E_0=k/\omega=\mu_0\varepsilon(\omega/k)=1/c$$

时，试证明能满足麦克斯韦方程。

2.6.10 在磁流体力学收缩效应(*Pinch effect*)的计算当中必须估算$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$，当磁感应强度$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\varphi}_0B_\varphi(\rho)$时，试证明

$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{\rho}_0B_\varphi^2/\rho$$

2.6.11 (a) 试说明从圆柱坐标的∇^2让$z=$常量就能得到平面极坐标的∇^2。

(b) 在球坐标里取∇^2，试说明即使把θ限制于$\pi/2$也不能得到∇^2在平面极坐标的形式。

注意：$\nabla^2(\rho,\ \varphi)=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

2.7 椭圆柱坐标$(u,\ v,\ z)$

把可能分离变数的坐标系进行分类的一个方法是从共焦椭圆柱系(2.15节)出发，作为它的特殊简约的情形来推导

出其它各系．这个做法的详细情况请参考Morse，Feshbach，数学物理方法，第5章。这里，为了较之推导更强调应用，按对称性的顺序把具有平移轴的坐标系逐次进行研究。具有平移轴的坐标系在本质上都是二维的，在它上面再加上第三维（z轴）。

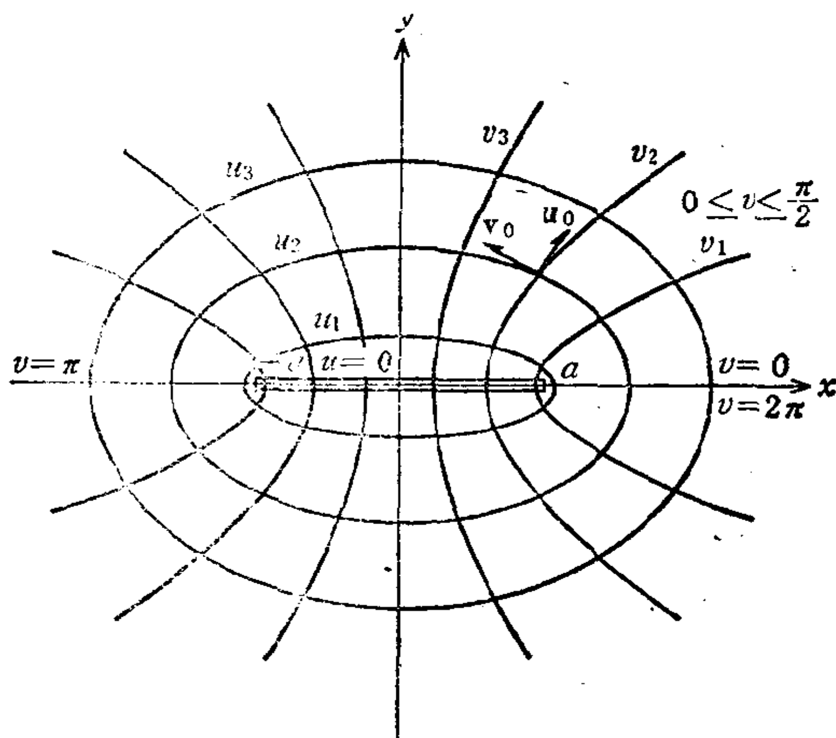


图 2.5　椭圆柱坐标

向椭圆柱坐标的变换式是

$$x = a\cosh u\cos v$$
$$y = a\sinh u\sin v$$
$$z = z \qquad (2.73)$$

坐标面群如下

1．椭圆柱u = 常量，$0\leqslant u<\infty$

2．双曲柱v = 常量，$0\leqslant v\leqslant 2\pi$

3．平行于xy面的平面，z = 常量，$-\infty<z<\infty$反过来求解（2.73）时就会明白这一事实。首先把两边平方

$$x^2 = a^2\cosh^2 u\cos^2 v \tag{2.74}$$

$$y^2 = a^2\sinh^2 u\sin^2 v \tag{2.75}$$

由此，得

$$\frac{x^2}{a^2\cosh^2 u} + \frac{y^2}{a^2\sinh^2 u} = 1 \tag{2.76}$$

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2\sin^2 v} = 1 \tag{2.77}$$

令 u 为常量时，(2.76) 代表以 x 轴为长轴的椭圆．让 v 为常量时，(2.77) 给出在 x 轴有焦点的双曲线。

度规因子为

$$\begin{aligned} h_1 &= h_u = a(\sinh^2 u + \sin^2 v)^{1/2} \\ h_2 &= h_v = a(\sinh^2 u + \sin^2 v)^{1/2} \\ h_3 &= h_z = 1 \end{aligned} \tag{2.78}$$

在第 6 章里考察保角映射时，作为二维系再一次来讨论这个坐标系。

习　　题

2.7.1 让 $\cosh u = q_1$，$\cos v = q_2$，$z = q_3$．试求度规因子 h_{q_1}，h_{q_2}。

$$h_{q_1} = a\left(\frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - 1}\right)^{1/2}$$

$$h_{q_2} = a\left(\frac{q_1^2 - q_2^2}{1 - q_2^2}\right)^{1/2}$$

2.7.2 试证明赫姆霍兹方程在圆柱坐标里能分离成如下常微方程组．

(a) 对 z 依赖性来讲，一维振子方程

(b) 马休方程

$$\frac{d^2g}{d\nu^2}+(b-2q\cos 2\nu)g=0$$

(c) 变形马休方程

$$\frac{d^2f}{du^2}-(b-2q\sinh 2u)f=0.$$

2.8 抛物柱坐标 (ξ, η, z)

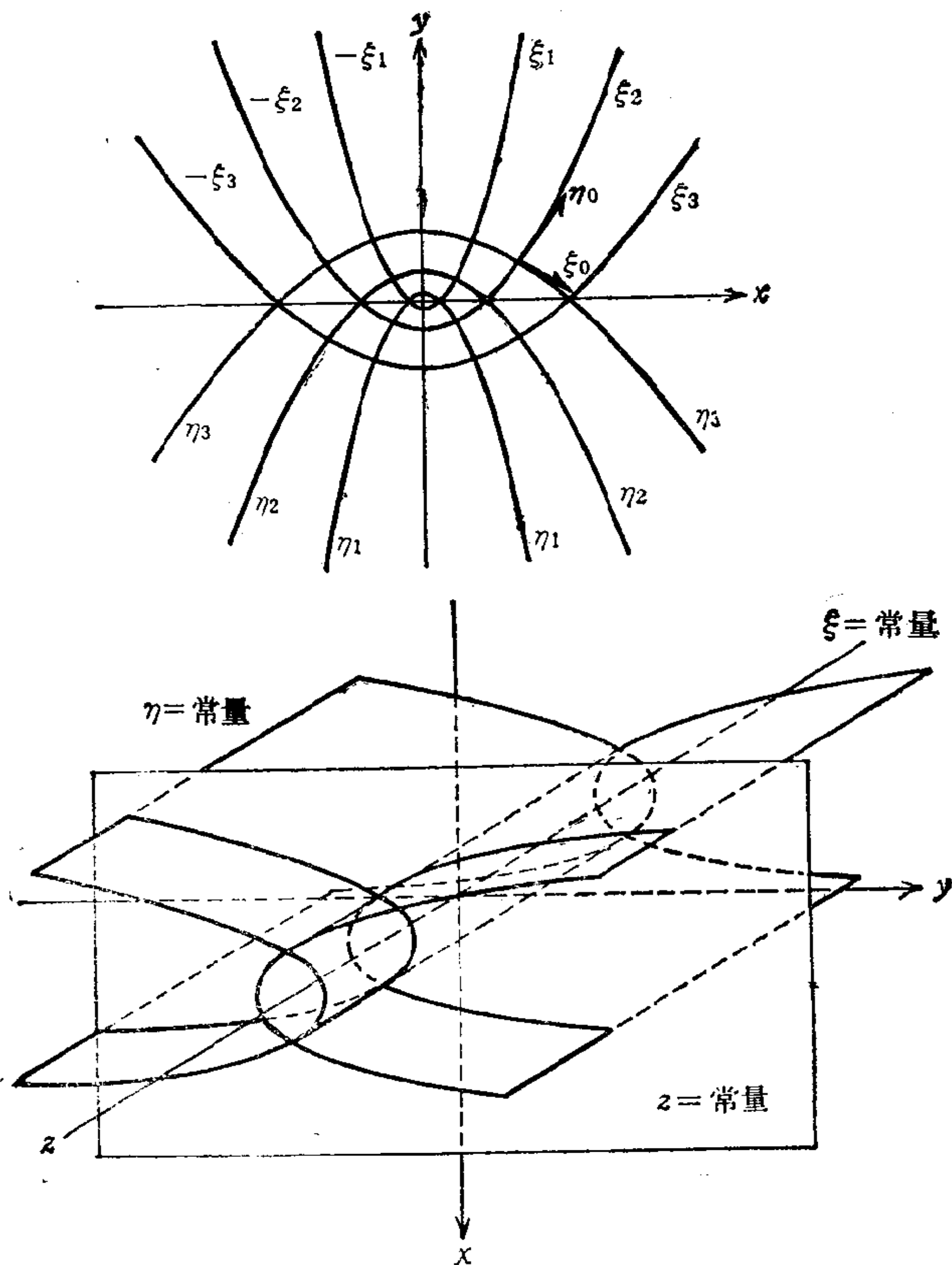


图 2.6 抛物柱坐标

变换式

$$x=\xi\eta,$$
$$y=\frac{1}{2}\ (\eta^2-\xi^2)\ , \qquad (2.79)$$
$$z=z$$

作出两组相互正交的抛物柱（图2.6）。按 ξ,η来解时得下列坐标面

1. 抛物柱ξ=常量 ，$-\infty<\xi<\infty$
2. 抛物柱η=常量，$0\leqslant\eta<\infty$
3. 平行于 xy 面的平面，z=常量，$-\infty<z<\infty$

由（2.6）则度规因子为

$$h_1=h_\xi=(\xi^2+\eta^2)^{1/2}$$
$$h_2=h_\eta=(\xi^2+\eta^2)^{1/2} \qquad (2.80)$$
$$h_3=h_z=1$$

2.9 二极坐标（ξ，η，z）

这是别开生面的坐标系。这个系并不是共焦椭圆体坐标的简约情形。在这个系里，即使 $k^2=0$的情形完全分离也是不可能的。（参考习题2.9.2）。尽管是这种异乎寻常的坐标系也能找到适合于某种问题的例子，下面就会看到。

变换式为

$$x=\frac{a\sinh\eta}{\cosh\eta-\cos\xi} \qquad (2.81a)$$

$$y=\frac{a\sin\xi}{\cosh\eta-\cos\xi} \qquad (2.81b)$$

$$z=z$$

用（2.81b）去除（2.81a），可得

●即使改变 ξ 的符号，抛物柱 ξ=常量 也保持不变。为了表示 x 的负值必须把 ξ（或 η）推广到负的范围。

$$\frac{x}{y}=\frac{\sinh\eta}{\sin\xi} \tag{2.82}$$

使用（2.82）从（2.81a）消去ξ时

$$(x-a\coth\eta)^2+y^2=a^2\mathrm{csch}^2\eta \tag{2.83}$$

使用（2.82）从（2.81b）消去η时，则有

$$x^2+(y-a\cot\xi)^2=a^2\csc^2\xi. \tag{2.84}$$

由（2.83），（2.84）可知坐标面如下。

1. 在$y=a\cot\xi$具有中心的圆柱

$$\xi=\text{常量}, \quad 0\leqslant\xi\leqslant 2\pi,$$

2. 在$x=a\coth\eta$具有中心的圆柱

$$\eta=\text{常量}, \quad -\infty<\eta<\infty,$$

3. 平行于xy面的平面

$$z=\text{常量}, \quad -\infty<z<\infty.$$

$\eta\to\infty$时$\coth\eta\to 1$，$\mathrm{csch}\eta=0$。（2.83）有解$x=a$，$y=0$。同理$\eta\to-\infty$时解为$x=-a$，$y=0$，圆收缩到一点，而圆柱则收缩成一根直线，能用（2.84）来表示(xy面上)的圆的组合都通过这一点。只要注意到对ξ的任意值来讲$x=\pm a$，$y=0$

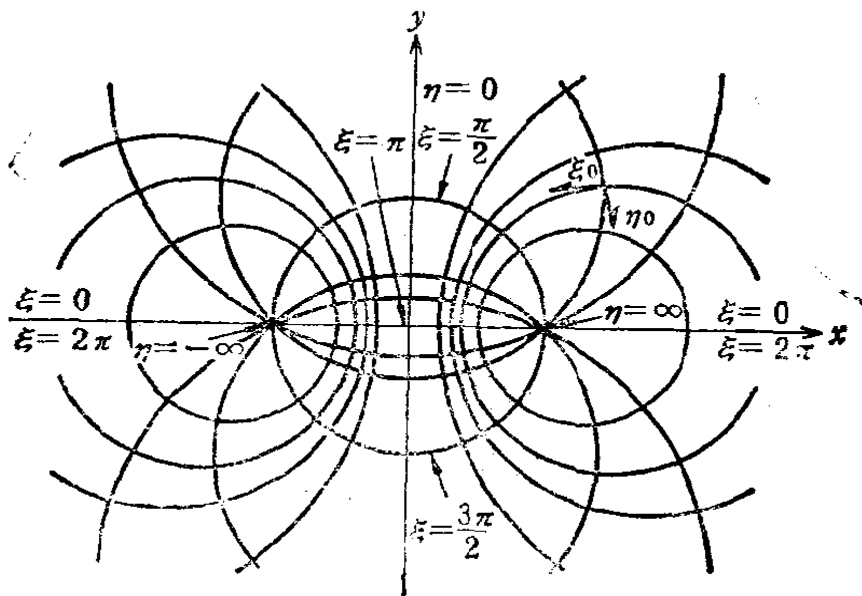


图 2.7 二极坐标

是（2.48）的解就会明白这一事实。

对于二极系度规因子为

$$h_1 = h_\xi = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

$$h_2 = h_\eta = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi} \qquad (2.85)$$

$$h_3 = h_z = 1$$

为了看到二极系如何起作用，首先取从点（a，0）与（$-a$，0）指向（x，y）的矢量，令其长度为ρ_1，ρ_2，它们和x轴的正向的夹角为θ_1，θ_2。从图2.8有

$$\rho_1^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$\rho_2^2 = (x+a)^2 + y^2 \qquad (2.86)$$

及

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{x-a}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{y}{x+a} \qquad (2.87)$$

现在定义❶

$$\eta_{12} = \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}, \qquad (2.88a)$$

$$\xi_{12} = \theta_1 - \theta_2 \qquad (2.88b)$$

利用（2.87）则$\tan\xi_{12}$有

$$\tan\xi_{12} = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2} \qquad (2.89)$$

$$= \frac{y/(x-a) - y/(x+a)}{1 + y^2/(x-a)(x+a)}$$

从（2.89）立即可得到（2.84）。于是知道了ξ在这里和

❶符号ln也用来表示$\log_e$。

$\xi_{12}=\theta_1-\theta_2$是一回事。按$\rho_2/\rho_1$来解（2.88a），把它表示成（2.86）时，可得

$$e^{2\eta_{12}}=\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}=\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} \tag{2.90}$$

两边乘以$e^{-2\eta_{12}}$，再使用双曲线函数的定义时就会得到(2.83)。这一结果表明η和$\eta_{12}=\ln(\rho_2/\rho_1)$是一样的。下面的例题就利用了上述对$\xi$和$\eta$的看法。

例题 2.9.1

无穷长直导线上沿z轴的负方向流有电流I。其中利用

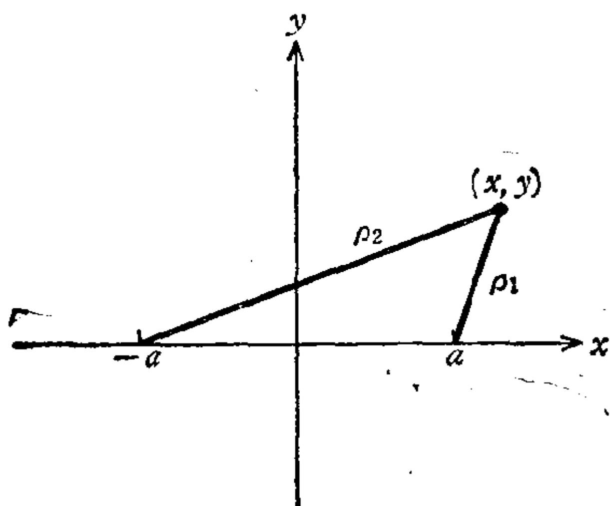


图 2.8

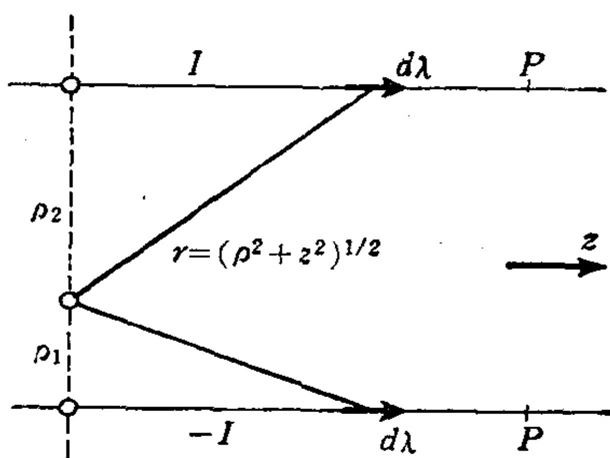


图 2.9 反平行电流

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{r} \tag{2.91}$$

试求出磁矢量势$\boldsymbol{A}$与磁感应强度$\boldsymbol{B}$。

由（2.91）可知$\boldsymbol{A}$只有z分量，对各导线从0到P积分之，取$P\to\infty$的极限时，则可得

$$A_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\lim_{P\to\infty}\left(2\int_0^P\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\rho_2^2+z^2}}-2\int_0^P\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\rho_1^2+z^2}}\right) \tag{2.92}$$

$$A_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\lim_{P\to\infty}2\left[\ln\left(z+\sqrt{\rho_2^2+z^2}\right)\Big|_0^P-\ln\left(z+\sqrt{\rho_1^2+z^2}\right)\Big|_0^P\right]$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\lim_{P\to\infty} 2\ \ln\frac{P+\sqrt{\rho_2^2+P^2}}{P+\sqrt{\rho_1^2+P^2}}-2\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \tag{2.93}$$

这结果归结为

$$A_z=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi\eta} \tag{2.94}$$

到目前为止还没有必要考虑二极坐标。再来根据 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 来计算磁感应强度。根据（2.22），（2.85）有

$$\boldsymbol{B}=\frac{(\cosh\eta-\cos\xi)^2}{a^2}\begin{vmatrix} h_\xi\xi_0 & h_\eta\eta_0 & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial\xi} & \frac{\partial}{\partial\eta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{-\mu_0 I}{2\pi}\eta \end{vmatrix}$$

$$=-\xi_0\frac{(\cos\ h\eta-\cos\ \xi)}{a}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi} \tag{2.95}$$

磁场只有 ξ_0 分量。请读者一定要用另外的坐标系来计算一下 $\boldsymbol{B}$。

在2.13节，2.14节为了推导圆环面坐标，双球面坐标再一次用到二极坐标。

习　题

2.9.1 两个平行圆筒分别指定其半径及中心间距离时，η_1（第1圆），η_2（第2圆），a 是唯一确定的，在这个意义下，试证明已决定了特定的二极坐标系。

2.9.2 (a) 试证明拉普拉斯方程 $\nabla^2\psi$（ξ，η，z）$=0$ 在二极坐标里不可能进行完全的分离变数，

(b) 如果要求 $\psi=\psi(\xi,\ \eta)$时，即把话题限制在二维

系时，试证明完全的分离是可能的.

2.9.3 半径分别为 b、c无穷长导体圆柱轴间距离相隔为 d，平行放置时，试求单位长度的电容量

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\eta_1-\eta_2}$$

2.9.4 作为前一题的极限，试求圆柱导体在单位长度上和平行于该圆柱轴的无穷平面导体之间的电容量

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\eta_1}$$

2.9.5 平行线波导管（传输线）是由用 $\eta=\pm\eta_1$表示的两根无穷长圆柱导体组成.

(a) 试证明

$$\eta_1=\cosh^{-1}\left\{\frac{\text{中心间距离}}{\text{圆柱半径}}\right\}$$

(b) 由例题2.9.1与习题2.9.3可以希望电场，磁场分别为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\eta}_0\frac{1}{h_1}E_0e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{\xi}_0\frac{1}{h_1}H_0e^{i(kz-\omega t)}$$

的形式的横电磁波（TEM）模式。

试证明 $E_0=V_0\eta_1$。但 $2V_0$是圆柱间的最大电位差。

(c) 让 $H_0=(\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}E_0$，试证明能满足麦克斯韦方程。

(d) 通过将坡印坡矢量的时间平均

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)$$

进行积分，试求出沿此传输线传播能量的功率。

答 功率 $=2\pi(\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}(V_0^2/\eta_1)$

2.10 长球面坐标 (u, ν, φ)

作为二维系，试从2.7节的椭圆坐标出发，使它围绕长轴或短轴进行旋转，作为方位角引入φ时（图2.10），能得到三维坐标系。首先围绕长轴可得到长球面坐标，它具有如下坐标面

1. 长球面

$$u = \text{常量}, \quad 0 \leqslant u < \infty,$$

2. 2叶旋转双曲面 $\nu = $ 常量，$0 \leqslant \nu \leqslant \pi$，

3. 通过z轴的半平面

$$\varphi = \text{常量}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

变换式为

$$\begin{aligned} x &= a\sinh u \sin\nu \cos\varphi, \\ y &= a\sinh u \sin\nu \sin\varphi, \\ z &= a\cosh u \cos\nu \end{aligned} \tag{2.96}$$

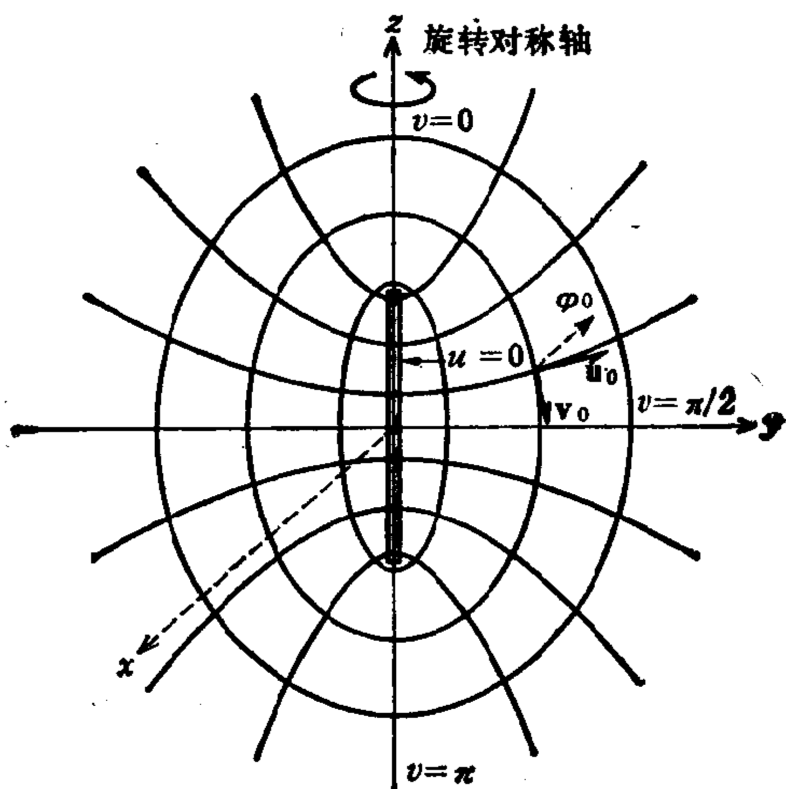
这里，请注意把原来笛卡儿坐标轴进行交换的目的是为了使得z轴成为旋转对称的轴。这个系的度规因子为

$$\begin{aligned} h_1 = h_u &= a(\sinh^2 u + \sin^2\nu)^{1/2} \\ &= a(\cosh^2 u - \cos^2\nu)^{1/2} \\ h_2 = h_\nu &= a(\sinh^2 u + \sin^2\nu)^{1/2} \\ h_3 = h_\varphi &= a\sinh u \sin\nu \end{aligned} \tag{2.97}$$

在物理学里长球面坐标，由于处理二中心问题时特别有用，因而是十分重要的系。两个中心相当于旋转椭圆体，旋转双曲体的两个焦点$(0, 0, a)$，$(0, 0, -a)$。如图2.11所示，现在令从左焦点到点(z, x)的距离为r_1，从右焦点的距离为r_2时，于是固定u时，则有

$$r_1 + r_2 = \text{一定}$$

通过(2.96)点(z, x)可用u与ν来表示。现在方位还不成问题，根据椭圆及双曲线的性质会知道



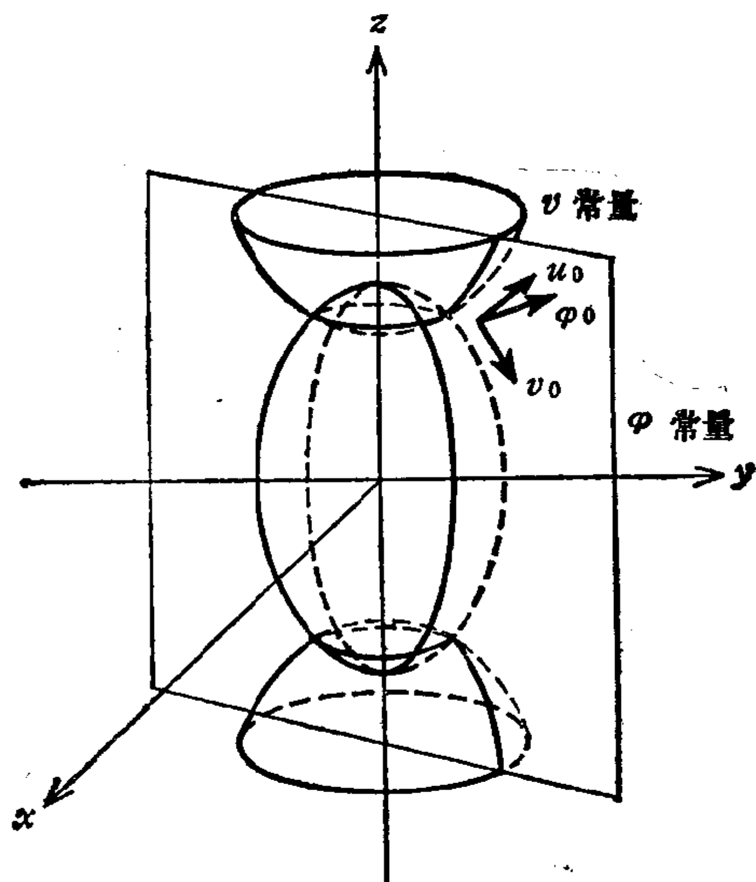


图 2.10 长球面坐标(上)截面

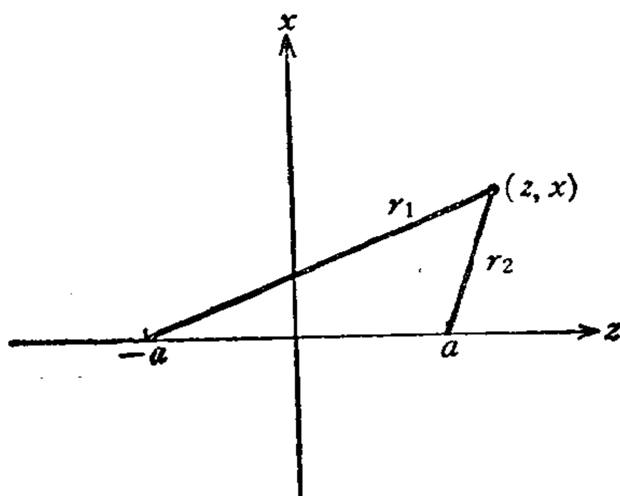


图 2.11

$$r_1 + r_2 = \text{常量}\ (u\ \text{固定})$$
$$r_1 - r_2 = \text{常量}\ (v\ \text{固定}) \qquad (2.98)$$

利用

$$r_1 = [(a+z)^2 + x^2]^{1/2}$$
$$r_2 = [(a-z)^2 + x^2]^{1/2} \qquad (2.99)$$

和（2.96）可知

$$r_1 = a(\cosh u + \cos v)$$
$$r_2 = a(\cosh u - \cos v) \qquad (2.100)$$

或

$$\frac{r_1 + r_2}{2a} = \cosh u,$$

$$\frac{r_1 - r_2}{2a} = \cos v \qquad (2.101)$$

这一事实表明u是离开二中心的距离之和的函数，另一方面v是离开二中心的距离之差的函数。

为了便于应用这个坐标系进行如下的变数变换

$$\xi_1 = \cosh u,\quad 1 \leqslant \xi_1 < \infty$$

$$\xi_2 = \cos\nu, \quad -1 \leqslant \xi_2 \leqslant 1 \qquad (2.102)$$

$$\xi_3 = \varphi, \quad 0 \leqslant \xi_3 \leqslant 2\pi$$

特别要注意

$$h_{\xi_1} = h_{\cosh u} \neq h_u \qquad (2.103)$$

使用新变数的话度规因子也跟着不同。

例题 2.10.1

氢分子离子是由两个质子和一个电子所组成的系统。令质子固定于焦点。对于这个系统的薛定谔波动方程为

$$\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi - \frac{e^2}{r_1}\psi - \frac{e^2}{r_2}\psi + \frac{e^2}{r_{12}}\psi = E\psi \qquad (2.104)$$

变数 r_1、r_2 由图 2.11 来定义，另外 r_{12} 是质子之间的距离，在图里正好是 $2a$。目前面临的问题是分离 (2.104) 的变数。

采用长球面坐标 ξ_1、ξ_2、ξ_3，首先必须做的是计算度规因子。由 (2.96)，(2.102)，可得

$$h_{\xi_1} = a\left(\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 - 1}\right)^{1/2}, \qquad h_{\xi_2} = a\left(\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{1 - \xi_2^2}\right)^{1/2} \qquad (2.105)$$

$$h_{\xi_3} = a(\xi_1^2 - 1)^{1/2}(1 - \xi_2^2)^{1/2}$$

利用这些度规因子和 (2.18a) 可求得

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{a_2}\left\{\frac{1}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left[(\xi_1^2 - 1)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left[(1 - \xi_2^2)\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}\right] + \frac{1}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_3^2}\right\}$$

$$(2.106)$$

由 (2.100) 得

$$\frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_2} = \frac{e^2 2a\xi_1}{a^2(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \qquad (2.107)$$

将 (2.106)、(2.107) 分别代入 (2.104)，使用通常的

标准手续

$$\psi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)f_3(\xi_3) \tag{2.108}$$

立即能把对方位角（ξ_3）的依赖性分离出来。可得

$$-\frac{\hbar^2}{2Ma^2}\left\{\frac{1}{(\xi_1^2-\xi_2^2)}\frac{1}{f_1}\frac{d}{d\xi_1}\left[(\xi_1^2-1)\frac{df_1}{d\xi_1}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(\xi_1^2-\xi_2^2)}\frac{1}{f_2}\frac{d}{d\xi_2}\left[(1-\xi_2^2)\frac{df_2}{d\xi_2}\right]\right\}-\frac{2e^2}{a}\frac{\xi_1}{(\xi_1^2-\xi_2^2)}-E'$$

$$=\frac{\hbar^2}{2Ma^2}\frac{1}{(\xi_1^2-1)(1-\xi_2^2)}\frac{1}{f_3}\frac{d^2f_3}{d\xi_3^2} \tag{2.109}$$

这里使用了所谓 $E'=E-\dfrac{e^2}{r_{12}}$ 的常量。如在 2.5节，2.6节所做的，设

$$\frac{1}{f_3}\frac{d^2f_3}{d\xi_3^2}=-m^2 \tag{2.110}$$

（2.109）变得简单起来，可写成

$$\frac{1}{f_1}\frac{d}{d\xi_1}\left[(\xi_1^2-1)\frac{df_1}{d\xi_1}\right]+\frac{1}{f_2}\frac{d}{d\xi_2}\left[(1-\xi_2^2)\frac{df_2}{d\xi_2}\right]$$

$$+\frac{4Mae^2\xi_1}{\hbar^2}+\frac{2Ma^2E'}{\hbar^2}(\xi_1^2-\xi_2^2)=m^2\left[\frac{1}{\xi_1^2-1}+\frac{1}{1-\xi_2^2}\right] \tag{2.111}$$

变数 ξ_1 和 ξ_2 一看就知道能够分离，对于 $f_1(\xi_1)$ 和 $f_2(\xi_2)$ 分别能得到 2 阶常微分方程。

在静电学里有应用长球面坐标的应用例子。

习　题

2.10.1 使用 $\xi=\cosh u$，$\eta=\cos v$

将

$$d\tau = a^3(\sinh^2 u + \sin^2 \nu)\sinh u \sin \nu du d\nu d\varphi$$

直接变换能得到长球面坐标的体积元是

$$d\tau = -a^3(\xi^2 - \eta^2)d\xi d\eta d\varphi$$

试证明之(对 η 来讲交换积分上、下限可以拿掉这个负号)。

2.10.2 使用长球面坐标，把代表给定长椭圆体的体积的体积分用 (a) u, ν, φ (b) ξ, η, φ 写出来. 把积分计算出来，并证明其结果和通常常用的结果——用长半径，短半径来写的

$$V = \frac{4}{3}\pi a_0^2 b_0$$

是相等的，但其中 a_0 为短半径，b_0 是长半径。

2.10.3 用海特勒——伦敦方法对氢分子进行量子力学计算当中，出现积分

$$I_{HL} = \frac{1}{\pi a_0^3}\int e^{-(r_1+r_2)/a_0} d\tau$$

其中体积分是按整个空间进行的. 试引入长球面坐标把积分计算出来。

答 $$I_{HL} = \left(1 + \frac{2a}{a_0} + \frac{4a^2}{3a_0^2}\right)e^{-2a/a_0}$$

2.11 扁球面坐标 (u, ν, φ)

(作为二维系来取) 把 2.7 节的椭圆坐标围绕椭圆的短轴进行旋转时则产生不同的三维旋转椭圆体系，即扁球面坐标系. 现在 φ 是方位角。坐标面如下。

1. 扁球面

$$u = \text{常量}, \quad 0 \leqslant u < \infty$$

2. 单叶旋转双曲面

$\nu =$ 常量[●]，　$-\frac{\pi}{2} \leqslant \nu \leqslant \frac{\pi}{2}$

3. 通过 z 轴的半平面

$\varphi =$ 常量，$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

表示它和笛卡儿坐标的关系的变换式可写成

$$x = a\cosh u \cos\nu \cos\varphi$$

$$y = a\cosh u \cos\nu \sin\varphi$$

$$z = a\sinh u \sin\nu$$

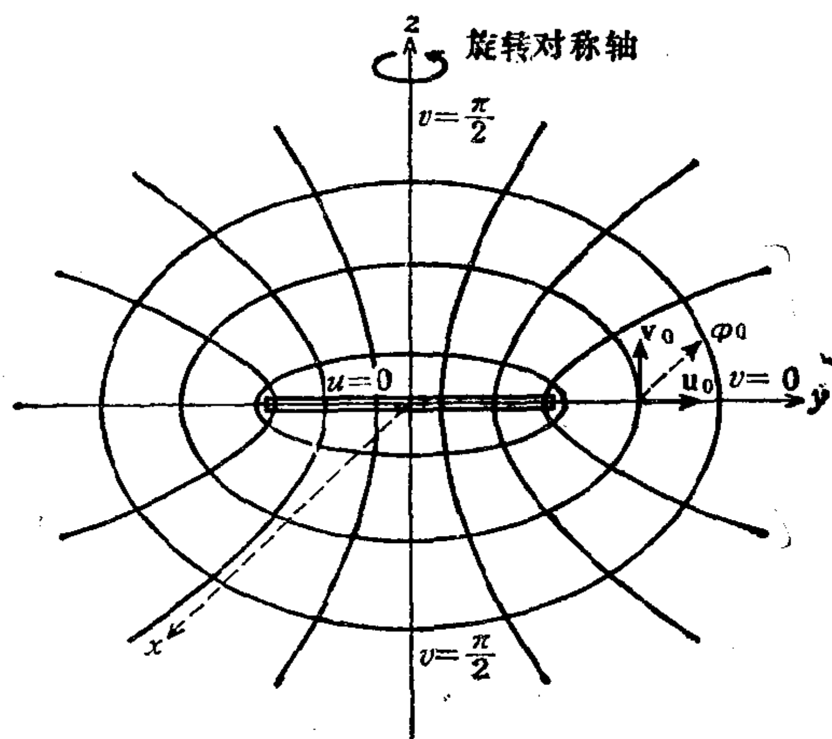


图 2.12　扁球面坐标截面

度规因子是

$$h_1 = h_u = a(\sinh^2 u + \sin^2 \nu)^{1/2}$$
$$= a(\cosh^2 u - \cos^2 \nu)^{1/2} \qquad (2.112)$$
$$h_2 = h_\nu = a(\sinh^2 u + \sin^2 \nu)^{1/2}$$

●ν 的变化域是 π 而在椭圆柱坐标里是 2π（2.7 节）这一点不同。ν 的负值给出 z 的负值。

$$h_3 = h_\varphi = a\cosh u \cos \nu$$

使 u 保持一定则产生扁球面，因它和行星表面的形状很相似，因此这个坐标系对于描述地球的重力场很有用 (J. P. Vinti, *Phys. Rev. Letters* 3, 8 (1959))长球面坐标，扁球面坐标用来说明第二类勒襄特函数。

须注意从 x 到 y 的指向去测量 φ，另外保持 (u, ν, φ) 的顺序时这个坐标系是左手系。因此在旋转的表达式里整体上带有 (-1) 的因子。要回到右手系只要弄成 (ν, u, φ) 的顺序就行。即

$$\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{u}_0 = +\boldsymbol{\varphi}_0$$

或者在变换式中进行 $\nu \to (\pi/2) - \nu$ 的改写也行。

习　　题

2.11.1 试在扁球面坐标里分离拉普拉斯方程。并解出依赖 φ 的微分方程。

2.11.2 半径为 a 的薄金属导体圆板带总电量为 Q。试求圆板的电容和圆板表面的电荷分布。

$$C = 8a\varepsilon_0$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a\sqrt{a^2 - r^2}} \text{ (对一侧来讲)}$$

2.12　旋转抛物面坐标 (ξ, η, φ)

在2.8节讨论了两组正交共焦抛物线。现在取在 xy 面上所表示的图形（图2.6），考虑以 y 轴为对称轴使各组抛物线进行旋转。于是产生两组正交共焦旋转抛物面。通过循环交换坐标以使得旋转轴成为 z 轴，得到坐标面如下。

1. 围绕 z 轴的正部分的旋转抛物面

$$\xi = \text{常量}, \quad 0 \leqslant \xi < \infty$$

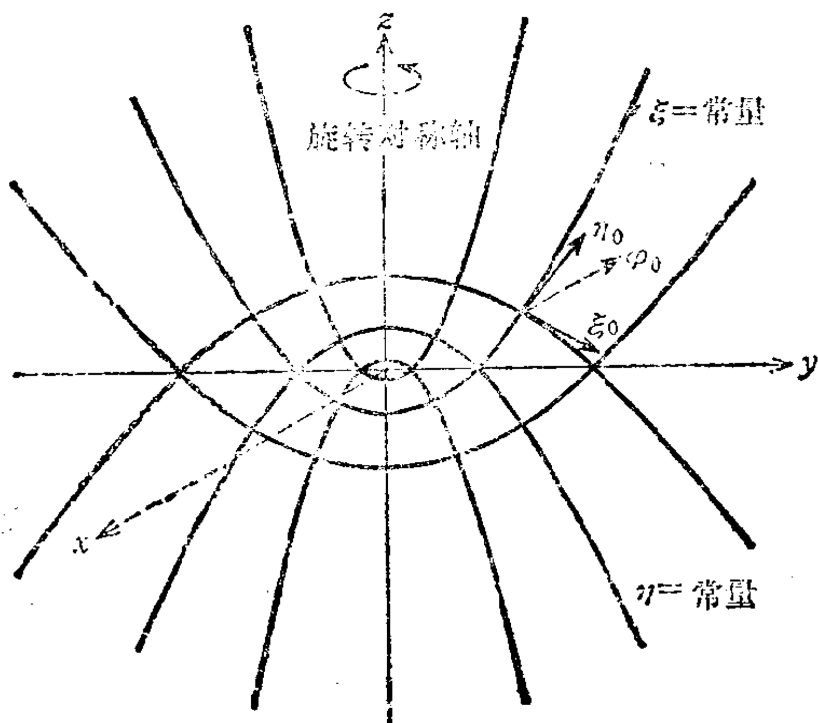


图 2.13 旋转抛物面坐标

2. 围绕 z 轴的负部分的旋转抛物面

$$\eta = 常量, \quad 0 \leqslant \eta < \infty$$

3. 通过 z 轴的半平面

$$\varphi = 常量, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

在 xy 面内从 x 轴来测量方位角时，得

$$\begin{aligned} x &= \xi\eta\cos\varphi \\ y &= \xi\eta\sin\varphi \\ z &= \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2) \end{aligned} \tag{2.113}$$

由（2.113）可求得度规因子。

$$\begin{aligned} h_1 &= h_\xi = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \\ h_2 &= h_\eta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \\ h_3 &= h_\varphi = \xi\eta \end{aligned} \tag{2.114}$$

由图2.13可知

$$\xi_0 \times \eta_0 = -\varphi_0$$

即旋转抛物面系是左手系。(2.113) 意味着 ξ 与 η 都具有(长度)$^{1/2}$的量纲。由于这个原故，有的著者也使用这样的符号，用 $\xi^{1/2}$ 代替这里的 ξ，用 $\eta^{1/2}$ 代替这里的 η.

旋转抛物面坐标用来分析史塔克效应❶——原子放在电场当中时所引起的能级分裂.

例题2.12.1　史塔克效应

如果沿着 z 轴正方向加上外电场 E_0 时，则对薛定谔波动方程附加上所谓 $-eE_0z$ 的势能项。对氢原子来讲，有

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi-\frac{e^2}{r}\psi-eE_0z\psi=E\psi \tag{2.115}$$

问题仍是分离变数.

使用 (2.18a)，(2.114)，得

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{\xi\eta(\xi^2+\eta^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi\eta\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\xi\eta\frac{\psi}{\partial\eta}\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{\xi^2\eta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{2.116}$$

另一方面知道

$$r=\frac{\xi^2+\eta^2}{2} \tag{2.117}$$

根据 (2.116)，(2.117) 再使用 $\psi=f(\xi)g(\eta)\Phi(\varphi)$ 时，则 (2.115) 成为

$$\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)}\left[\frac{1}{\xi f}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{1}{\eta g}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{dg}{d\eta}\right)\right]$$
$$+\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{\xi^2\eta^2}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\frac{2e^2}{\xi^2+\eta^2}+\frac{eE_0}{2}(\eta^2-\xi^2)+E=0 \tag{2.118}$$

---

❶H. A. Bethe and E. S. Salpeter, *Quantum Mechanics of One-and Two-Electron Atoms*, New York: Academic Press (1957)

设

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \tag{2.119}$$

时（2.118）立刻能分离成下列两个方程

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{1}{\xi f}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{df}{d\xi}\right) - \frac{m^2}{\xi^2}\right] + E\xi^2 - \frac{eE_0\xi^4}{2} + A = 0 \tag{2.120}$$

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{1}{\eta g}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{dg}{d\eta}\right) - \frac{m^2}{\eta^2}\right] + E\eta^2 + \frac{eE_0\eta^4}{2} + B = 0 \tag{2.121}$$

除了常数 A 与 B 遵守条件 $A+B=2e^2$ 以外完全是任意的.

在习题当中包含有抛物面坐标的其它应用。

习　题

2.12.1 假设抛物面坐标（ξ, η, φ）和通常的笛卡儿坐标以

$$x=\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi,\quad y=\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi,\quad z=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$$

的关系联系着时，则 h_ξ^2, h_η^2, h_φ^2 如何。

2.12.2 利用在前一题里定义的 ξ, η, φ，试推导出对应于（2.120）的史塔克效应的方程. 结果得到级数解和拉盖尔多项式。

2.12.3 在原子物理学或核物理学里特别重要的概念是，反演性——波函数对于坐标的反演是偶还是奇的性质——在笛卡儿坐标里，当反演或宇称算符 P 作用于（x, y, z）时，有

$$P(x,\ y,\ z) = (-x,\ -y,\ -z)$$

试在下列坐标系写出对应的算符。

(a) 球坐标 (r, θ, φ)

(b) 圆柱坐标 (ρ, φ, z)

(c) 长球面坐标 (u, v, φ)

(d) 长球面坐标 (ξ, η, φ)

(e) 扁球面坐标 (u, v, φ)

(f) 抛物面坐标 (ξ, η, φ)

2.12.4 (a) 对于氢原子的波动方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u + Vu = Eu$$

但 V 为电子的势能

$$V = -\frac{Ze^2}{r}$$

E 是意味着总能量的某常量。试证明通过使用抛物面坐标能够分离变数。

(b) 试证明即使使用把原子核作为焦点之一的长球面坐标也能分离变数。

2.13 圆环面坐标 (ξ, η, φ)

把二极坐标系（2.9节）的 xy 面围绕图 2.7的 y 轴进行旋转就能得到这个坐标系.由中心在 y 轴上的圆（ξ = 常量）能产生球，由中心在 x 轴上的圆（η = 常量）能作出圆环面.现在仍使得旋转轴成为 z 轴来交换坐标的变换式是

$$x = \frac{a \sinh\eta \cos\varphi}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

$$y = \frac{a \sinh\eta \sin\varphi}{\cosh\eta - \cos\xi} \qquad (2.122)$$

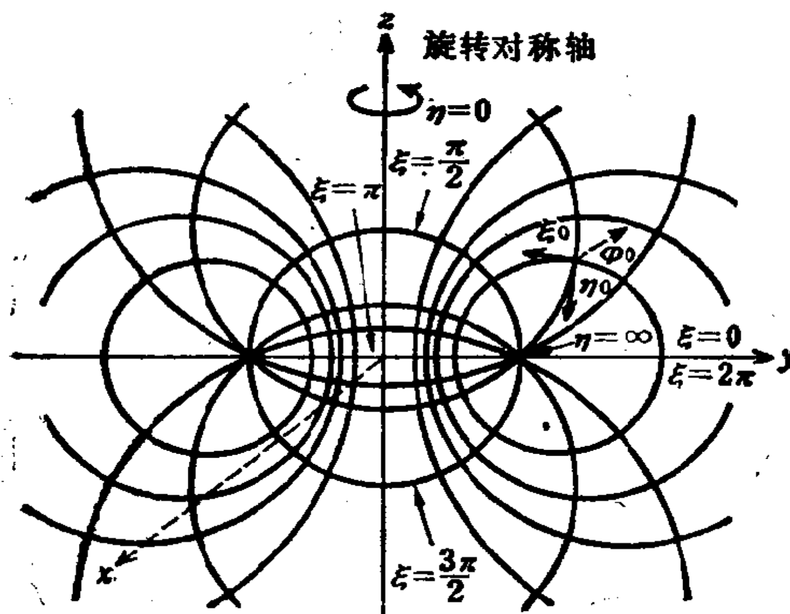
$$z = \frac{a \sin\xi}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

由这些式子得度规因子

$$h_1 = h_\xi = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi}$$

$$h_2 = h_\eta = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi} \qquad (2.123)$$

$$h_3 = h_\varphi = \frac{a\sinh\eta}{\cosh\eta - \cos\xi}$$



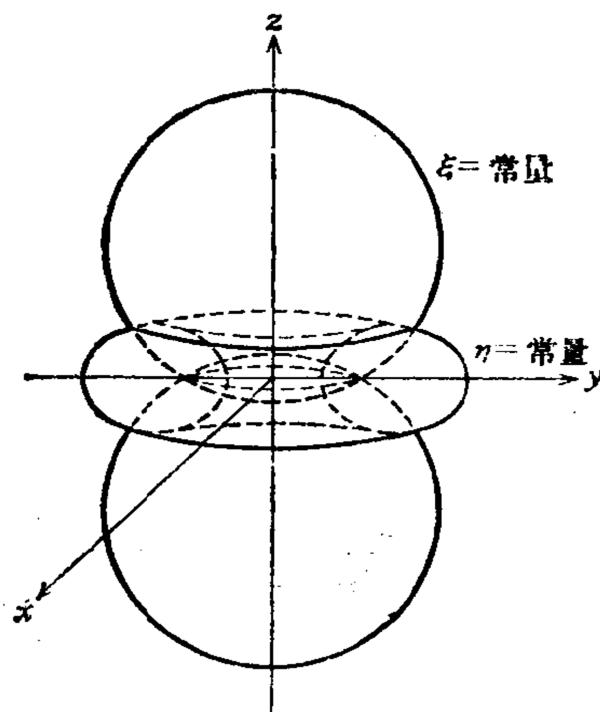


图 2.14 圆环面坐标(上)截面

通过旋转作出的坐标面如下.

1. 中心为 $(0, 0, a\cot\xi)$，半径为 $a|\operatorname{cosec}\xi|$ 的球

$$\xi = \text{常量},\ 0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi$$

$$2az\cot\xi = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \qquad (2.124)$$

2. 圆环面

$$\eta = \text{常量},\ 0 \leqslant \eta < \infty$$

截面离开 z 轴 $a\coth\eta$，半径为 $a\operatorname{csch}\eta$ 的圆

$$4a^2(x^2+y^2)\coth^2\eta = (x^2+y^2+z^2+a^2)^2 \qquad (2.125)$$

3. 通过 z 轴的半平面

$$\varphi = \text{常量},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

拉普拉斯方程在这个坐标系里不能进行完全分离. 这个坐标系在物理学里虽有些应用（比如涡轮的描述）但出现的并不那么频繁，因此这个坐标系用得并不多.

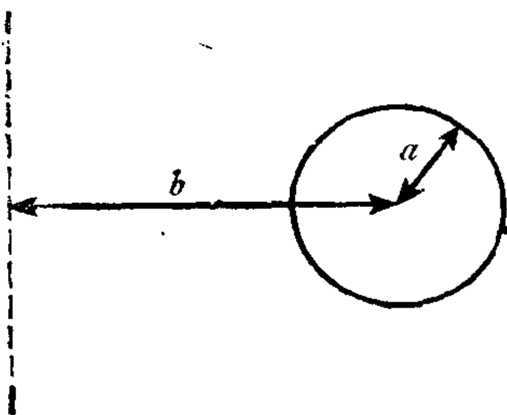


图 2.15

须注意和上一节与大上一节一样，(ξ, η, φ)是左手系。为了变换成右手系恐怕最简单的方法是按 (η, ξ, φ) 的顺序取坐标。

习　题

2.13.1 试证明用图 2.15 定义的圆环面的表面积是

$$(2\pi a)\times(2\pi b) = 4\pi^2 ab.$$

2.13.2 作为在圆环面坐标里求解拉普拉斯方程的第 1 阶段假定势 $\psi(\xi, \eta, \varphi)$ 具有

$\psi(\xi, \eta, \varphi)=\sqrt{\cosh\eta-\cos\xi}\ X(\xi)\ N(\eta)\ \Phi(\varphi)$

的形式．而且有（a）$X(\xi)=\sin n\xi$，$\cos n\xi$，

（b）$\Phi(\varphi)=\sin m\varphi$，$\cos m\varphi$但假定$m$、$n$为整数．试问$X(\xi)$或$\Phi(\varphi)$采取上述形式的根据如何？试证明拉普拉斯方程能归结于

$$\frac{1}{\sinh\eta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\sinh\eta\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\eta}\right)-\frac{m^2}{\sinh^2\eta}N$$

$$-\left(n^2-\frac{1}{4}\right)N=0$$

2.14　双球面坐标（ξ，η，φ）

回到2.9节的二极坐标，把如图2.7所示的xy平面围绕x轴进行旋转时，产生正交二群的球面．对这些加上方位角一定的平面就得到双球面坐标系，变换式是

$$x=\frac{a\sin\xi\cos\varphi}{\cos h\eta-\cos\xi}$$

$$y=\frac{a\sin\xi\sin\varphi}{\cos h\eta-\cos\xi} \qquad (2.126)$$

$$z=\frac{a\sin h\eta}{\cos h\eta-\cos\xi}$$

这次仍是使旋转轴成为z轴来重新命名的．度规因子是

$$h_1=h_\xi=\frac{a}{\cos h\eta-\cos\xi}$$

$$h_2=h_\eta=\frac{a}{\cos h\eta-\cos\xi} \qquad (2.127)$$

$$h_3=h_\varphi=\frac{a\sin\xi}{\cos h\eta-\cos\xi}$$

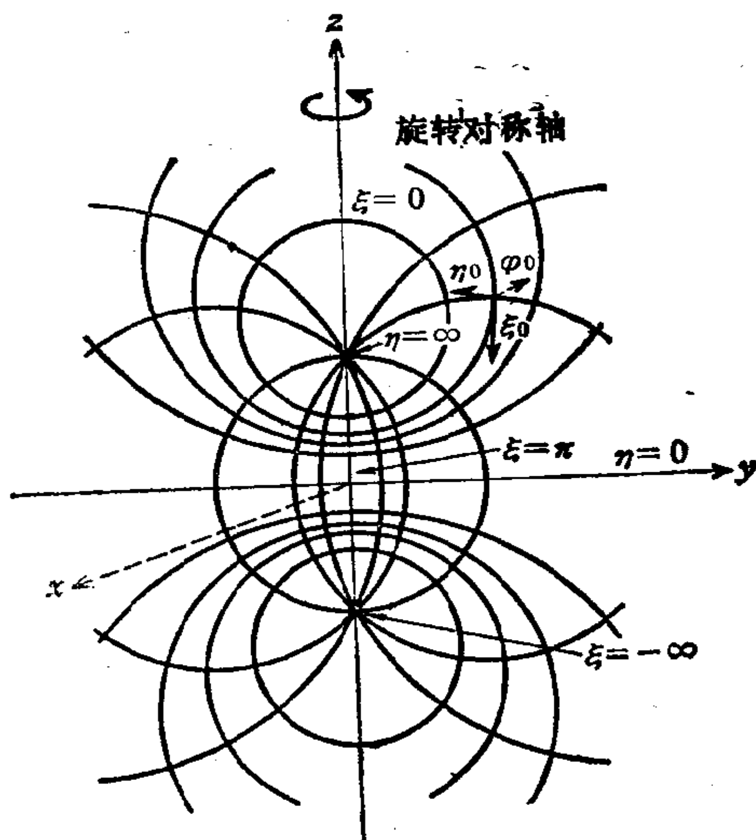


图 2.16 双球面坐标

坐标面如下

1. 围绕 z 轴的 4 次旋转面

$\xi=$ 常量，$0<\xi<\dfrac{\pi}{2}$　　z 轴上的脉动

$\xi=\dfrac{\pi}{2}$，　　球

$\dfrac{\pi}{2}<\xi<\pi$，　　尖点在 z 轴上

2. 中心在 $(0,\ 0,\ \coth\eta)$，半径为 $a|\operatorname{csch}\eta|$ 的球

$$\eta=\text{常量}\qquad -\infty<\eta<\infty$$

3. 通过 z 轴的半平面

$$\varphi=\text{常量}\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

在这个坐标系里 $k^2\neq 0$ 的 (2.1) 的一般式子虽不能分

离，但拉普拉斯方程可能部分地分离．已经知道双球面坐标对于特殊的静电问题，比如导体球和靠近它的导体平面间的静电电容问题是有用的。

习　题

2.14.1 试证明在双球面坐标里（$\sqrt{\cosh\eta-\cos\xi}$ 的因子除外）拉普拉斯方程是可能分离的。提示：让 $\psi(\xi,\eta,\varphi)=\sqrt{\cosh\eta-\cos\xi}\,X(\xi)N(\eta)\Phi(\varphi)$。

2.14.2 利用双球面坐标，试求导体球和（不与之相交）导体平面之间的静电电容。

2.15 共焦椭圆体坐标（ξ_1，ξ_2，ξ_3）

这个非常普遍的坐标系具有下列三种坐标面群。

1．椭圆体（任何两个轴的长度皆不相等）ξ_1 = 常量

$$\frac{x^2}{a^2-\xi_1}+\frac{y^2}{b^2-\xi_1}+\frac{z^2}{c^2-\xi_1}=1 \tag{2.128}$$

2．单叶双曲面 ξ_2 = 常量

$$\frac{x^2}{a^2-\xi_2}+\frac{y^2}{b^2-\xi_2}+\frac{z^2}{\xi_2-c^2}=1 \tag{2.129}$$

3．二叶双曲面 ξ_3 = 常量

$$\frac{x^2}{a^2-\xi_3}-\frac{y^2}{\xi_3-b^2}+\frac{z^2}{\xi_3-c^2}=1 \tag{2.130}$$

常数 a，b，c 是描述椭圆体面，双曲面的参数并赋以

$$a^2>\xi_3>b^2>\xi_2>c^2>\xi_1 \tag{2.131}$$

的限制。在（2.128），（2.129），（2.130）里，明显地写出这个限制结果出现的负号。

变换式是

$$x^2=\frac{(a^2-\xi_1)(a^2-\xi_2)(a^2-\xi_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

$$y^2=\frac{(b^2-\xi_1)(b^2-\xi_2)(\xi_3-b^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)} \tag{2.132}$$

$$z^2=\frac{(c^2-\xi_1)(\xi_2-c^2)(\xi_3-c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$$

通过相当麻烦的计算已知度规因子是

$$h_1=h_{\xi_1}=\frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)}{(a^2-\xi_1)(b^2-\xi_1)(c^2-\xi_1)}\right]^{1/2}$$

$$h_2=h_{\xi_2}=\frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_3-\xi_2)(\xi_2-\xi_1)}{(a^2-\xi_2)(b^2-\xi_2)(c^2-\xi_2)}\right]^{1/2} \tag{2.133}$$

$$h_3=h_{\xi_3}=\frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)}{(a^2-\xi_3)(\xi_3-b^2)(\xi_3-c^2)}\right]^{1/2}$$

对于表示坐标面的方程来讲，破坏了有关ξ_1，ξ_2，ξ_3的对称性，写得使各因子皆为正。

因在变换式（2.132）里笛卡儿坐标以平方形式出现，大概会看得出一点 P（ξ_1，ξ_2，ξ_3）能和8点（$\pm x$，$\pm y$，$\pm z$）相对应。通过对ξ_1，ξ_2，ξ_3限制适当的符号的取法，或者通过引进椭圆函数或关联函数使8重性得以解除。

这个坐标系在数学物理学里虽是有用的，但由于它过分的普遍性用起来很麻烦。因这本书是以入门概要介绍为宗旨，所以今后专就具有旋转对称轴的椭圆体进行讨论。

2.16 锥面坐标（ξ_1，ξ_2，ξ_3）

这是前一节共焦椭圆体坐标进一步缩减形（不常用）坐标面如下。

1. 以原点为中心，半径为ξ_1的球，ξ_1＝常量，

$$x^2+y^2+z^2=\xi_1^2 \tag{2.134}$$

2. 以原点为顶点，椭圆形的截面以 z 轴为轴的锥面，ξ_2 = 常量

$$\frac{x^2}{\xi_2^2}+\frac{y^2}{\xi_2^2-b^2}=\frac{z^2}{c^2-\xi_2^2} \tag{2.135}$$

3. 以原点为顶点，以 x 轴为轴的椭圆锥面，ξ_3 = 常量

$$\frac{x^2}{\xi_3^2}=\frac{y^2}{b^2-\xi_3^2}+\frac{z^2}{c^2-\xi_3^2} \tag{2.136}$$

和（2.15）节一样参数 b、c 满足

$$c^2>\xi_2^2>b^2>\xi_3^2 \tag{2.137}$$

的限制、反过来求解（2.134），（2.135），（2.136），可得变换式

$$x^2=\left(\frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{bc}\right)^2$$

$$y^2=\frac{\xi_1^2(\xi_2^2-b^2)(b^2-\xi_3^2)}{b^2(c^2-b^2)} \tag{2.138}$$

$$z^2=\frac{\xi_1^2(c^2-\xi_2^2)(c^2-\xi_3^2)}{c^2(c^2-b^2)}$$

接着根据（2.6）度规因子是

$$h_1=h_{\xi_1}=1,$$

$$h_2=h_{\xi_2}=\left[\frac{\xi_1^2(\xi_2^2-\xi_3^2)}{(\xi_2^2-b^2)(c^2-\xi_2^2)}\right]^{1/2} \tag{2.139}$$

$$h_3=h_{\xi_3}=\left[\frac{\xi_1^2(\xi_2^2-\xi_3^2)}{(b^2-\xi_3^2)(c^2-\xi_3^2)}\right]^{1/2}$$

这个奇妙的坐标系，几乎完全被忽视了。可是最近才发现[1]它对于描述非对称转子的角动量本征函数是有用的。

---

[1] R. D. Spence, *Am. J. Phys.* 27, 329 (1959).

2.17 共焦抛物面坐标 (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

在这一章里出现的坐标系当中，除了二极，圆环面，双球面坐标系剩下的全是从共焦椭圆体坐标（2.15节）引出的。这些缩减后的特殊坐标系的最后是共焦抛物面坐标系。其坐标面组成如下

1。向 z 轴的负指向延伸的椭圆形截面的共焦抛物面，ξ_1 = 常量

$$\frac{x^2}{a^2-\xi_1}+\frac{y^2}{b^2-\xi_1}-2z+\xi_1=0 \tag{2.140}$$

2。双曲抛物面，ξ_2 = 常量

$$\frac{x^2}{a^2-\xi_2}-\frac{y^2}{\xi_2-b^2}+2z+\xi_2=0 \tag{2.141}$$

3。向 z 轴的正指向延伸的椭圆形截面的共焦抛物面，ξ_3 = 常量

$$\frac{x^2}{\xi_3-a^2}+\frac{y^2}{\xi_3-b^2}-2z-\xi_3=0 \tag{2.142}$$

和2.15节，2.16节一样，在参数和变数之间有

$$\xi_3>a^2>\xi_2>b^2>\xi_1 \tag{2.143}$$

的限制。

变换式是 $x^2=\dfrac{(a^2-\xi_1)(a^2-\xi_2)(\xi_3-a^2)}{a^2-b^2}$

$$y^2=\frac{(b^2-\xi_1)(\xi_2-b^2)(\xi_3-b^2)}{a^2-b^2} \tag{2.144}$$

$$z=\frac{1}{2}(a^2+b^2-\xi_1-\xi_2-\xi_3)$$

由此能得到度规因子是

$$h_1=h_{\xi_1}=\frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)}{(a^2-\xi_1)(b^2-\xi_1)}\right]^{1/2}$$

$$h_2 = h_{\xi_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_3 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_1)}{(a^2 - \xi_2)(\xi_2 - b^2)}\right]^{1/2}$$

$$h_3 = h_{\xi_3} = \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}{(\xi_3 - a^2)(\xi_3 - b^2)}\right]^{1/2} \tag{2.145}$$

这个坐标系的应用在电磁学[⑱]里得到发展，然而在本书范围内这个系并不太重要。

参考文献

MORSE.P.M., and H.FESHBACH.*Methods of Theoretical Physics*, New York: McGraw-Hill (1953) 的第5章讨论了这里提到的大部分坐标系．请注意Morse，Feshbach对于笛卡儿坐标系也用了左手系这无关紧要．在这本优秀的书里（难解）在其它地方为了求解物理问题也有使用各种坐标系的许多例子．

[⑱] C. Maxwell. A *Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol I, 3rd Ed. Oxford University Press (1940), Chapter X.

第3章 张 量 分 析

3.1 绪论，定义

张量在物理学的许多领域——广义相对论和电磁学是其中之一——都是重要的。张量出现得更多的问题之一是各向异性固体的情形．在这种情况下，弹性的，光学的，电的，磁的性质都可以用张量来表示。就各向异性的固体弹性性质来讲，在3.6节要略加详细讨论．作为绪论的实例考虑电流。首先把欧姆定律写成通常的形式

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{3.1}$$

这里 $\boldsymbol{J}$ 为电流密度，$\boldsymbol{E}$ 为电场强度，两者皆为矢量．如果是各向同性介质时，电导率 σ 是标量。比如就 x 分量来讲，有

$$J_1=\sigma E_1 \tag{3.2}$$

然而，象许多晶体或磁场中的等离子体的情形介质是各向异性的话，则 x 方向的电流密度不仅与 x 方向的电场有关也许和 y 方向或 z 方向的电场有关．假定存在着线性关系，则（3.2）必须用

$$J_1=\sigma_{11}E_1+\sigma_{12}E_2+\sigma_{13}E_3 \tag{3.3}$$

来置换。一般有

$$J_i=\sum_k\sigma_{ik}E_k \tag{3.4}$$

在通常的三维空间里，标量电导率 σ 可用 9 个元素 σ_{ik} 的组合来替换。

$$\sigma\to\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

实际上，这 9 个元素的排列，是3.3节所表示的张量。

在第 1 章里，有在坐标系旋转下不变的量，把这个不变量叫做标量。另外，其分量能象从原点到 1 点距离的分量一样变换的量（1.2节的（1.13））叫做矢量。这个变换性质用来作为定义矢量的特性。这个定义如下式（3.6）所示，但也可以有一些任意性。

$$A_i' = \sum_j a_{ij} A_j, \tag{3.6}$$

其中 a_{ij} 为 x_i' 轴与x_j 轴之间的角的余弦。

考虑矢量的原型时，通过偏微分，有

$$x_i' = \sum_j \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} x_j \tag{3.7}$$

其中

设
$$a_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \tag{3.8}$$

时，则（3.6）与（3.7）的形式相同。任意的一组 A_j 如能按

$$A_i' = \sum_j \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} A_j \tag{3.9}$$

变换时，则可定义为逆变矢量。

可是，类型稍有不同的矢量的变换已经出现标量函数的梯度 $\nabla\varphi$ 定义为

$$\nabla\varphi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \tag{3.10}$$

并按

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x_i'} = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \tag{3.11}$$

进行变换，其中 $\varphi = \varphi(x,y,z) = \varphi(x',y',z') = \varphi'$，$\varphi$ 作为

标量来定义。值得注意的是这个变换和（3.9）比较起来不同之点是用 $\partial x_j/\partial x_i'$ 替换了 $\partial x_i'/\partial x_j$。（3.11）是以梯度为典型的协变矢量的定义。

在直角坐标里为

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}=\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}=a_{ij}\qquad(3.12)$$

即在逆变和协变之间没有差别。在其它坐标系（3.12）一般并不成立，必须注意逆变与协变的差别已是现实问题。在这一节的剩余部分，逆变矢量的分量如 A^j 用上标表示，另一方面对协变矢量分量要用带下标的 A_i。为了消除对张量这个词的恐怖心理，就把标量叫做 0 阶张量，把矢量叫做 1 阶张量，再用下列各式定义 2 阶的逆变、混合、协变张量

$$A'^{ij}=\sum_{kl}\frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\frac{\partial x_j'}{\partial x_l}A^{kl},$$

$$B'^{i}_{j}=\sum_{kl}\frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial x_j'}B^{k}_{l},\qquad(3.13)$$

$$C'_{ij}=\sum_{kl}\frac{\partial x_k}{\partial x_i'}\frac{\partial x_l}{\partial x_j'}C_{kl}.$$

A^{kl} 对两个上标都是逆变的，C_{kl} 对两个下标都是协变的，B^k_l 对第 1 个指标 k 是逆变的，对第 2 个指标 l 是协变的。如果使用直角坐标系时，二阶张量的 3 种形式逆变、混合、协变都是相同的。二阶张量 A（分量为 A^{kl}）把它的分量按纵横正方的排列表示它实为方便。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}A^{11} & A^{12} & A^{13}\\ A^{21} & A^{22} & A^{23}\\ A^{31} & A^{32} & A^{33}\end{pmatrix}\qquad(3.14)$$

虽是这样说，但并不是把数和函数随便按正方形排列就都是张量。不可缺少的是该分量按（3.13）变换。这个变换的要

求将 2 维张量

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}-xy & -y^2\\ x^2 & xy\end{pmatrix}$$

进行详细研究即可明白。带撇的（旋转）坐标系，$T^{11\prime}$分量如 1.2 节已讨论的那样必须是$-x'y'$。和 1.2 节完全相同要研究它和（3.13）是否一致让 i 和 j 分别等于 1

$$T^{11\prime}=-x'y'\overset{?}{=}\sum_{kl}\frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\frac{\partial x_i'}{\partial x_l}T^{kl}$$

$$=\sum a_{1k}a_{1l}T^{kl},$$

这里根据(3.7) 或(1.8)$x'=x\cos\varphi+y\sin\varphi$，$y'=-x\sin\varphi+y\cos\varphi$。将左边改写成不带撇的坐标。于是利用 $a_{11}=\cos\theta$，$a_{12}=\sin\theta$，对于给定的 T^{kl}

$$-(x\cos\theta+y\sin\theta)(-x\sin\theta+y\cos\theta)$$

$$\overset{?}{=}\cos^2\theta T^{11}+\cos\theta\sin\theta T^{12}+\sin\theta\cos\theta T^{21}+\sin^2\theta T^{22}$$

$$=-xy\cos^2\theta-y^2\cos\theta\sin\theta+x^2\sin\theta\cos\theta+xy\sin^2\theta$$

这就得到了表示（3.11）能被满足的等式。对其它三个分量重复同样的手续，全部分量都按（3.13）进行变换，从而能够证明 T 为 2 阶张量。

这个变换性决不是立刻能看清楚的。比如若改变符号 T^{22} 不是 $+xy$ 而是 $-xy$时则有

$$T^{11\prime}\neq\sum_{kl}a_{1k}a_{1l}T^{kl}$$

排列

$$\begin{pmatrix}-xy & -y^2\\ x^2 & -xy\end{pmatrix}$$

不是张量。和所要求的变换性不符，所以不是张量。

张量的加法减法和矢量的情形完全相同，可以用各个元

素定义。加减两个张量就是将对应元素分别加减。即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C} \tag{3.15}$$

时，则有

$$A^{ij}+B^{ij}=C^{ij}$$

当然 A 和 B 为阶数相同的张量，都必须用相同维数的空间来表示。

在张量分析里，为使（3.13）或以后的张量方程有更简洁（对初学者显得不好懂）的形式，习惯上采用求和规则。只要区别出逆变和协变，不管哪个角标它在方程的一方总是一个在上而另一个在下出现，那就按该角标自动求和。这样（3.13）的第 2 个表达式可写成

$$B_j^{\prime i}=\frac{\partial x_i^{\prime}}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial x_j^{\prime}}B_l^k \tag{3.16}$$

其中，在右边都是就 k 和 l 求和，这就是求和规则。

为了对求和规则和张量分析的技巧稍加说明，要证明一下 δ_{kl} 实际上是二阶混合张量 δ_l^k。问题是 δ_l^k 果真能按(3.13)进行变换与否，这是能否将它叫做张量的判断条件（判据）。若利用求和规则时，根据 δ(*Kronecker*) 的定义，有

$$\delta_l^k\frac{\partial x_i^{\prime}}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial x_j^{\prime}}=\frac{\partial x_i^{\prime}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j^{\prime}} \tag{3.17}$$

但将右边进行直接偏微分可知

$$\frac{\partial x_i^{\prime}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j^{\prime}}=\frac{\partial x_i^{\prime}}{\partial x_j^{\prime}} \tag{3.18}$$

但 $x_i^{\prime}$、$x_j^{\prime}$ 都是独立坐标，所以一个对另一个的变化率当两个是不同的分量时就为 0，两个一致则变化率为1。即

$$\frac{\partial x_i^{\prime}}{\partial x_j^{\prime}}=\delta'^i_j \tag{3.19}$$

由此可得

$$\delta'^i_j = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} \delta^k_l$$

这表明 δ^k_l 实际上是二阶混合张量。δ 还有一个有趣的性质，即在不管怎样旋转的坐标系里，都有相同的分量，因此是各向同性的。在 3.4 节里出现 1 个 3 阶的各向同性张量和 3 个 4 阶的各向同性张量。不存在各向同性的 1 阶张量（矢量）。

描述张量时角标出现的次序极为重要。一般 A^{mn} 和 A^{nm} 虽是相互独立的，但有各种有趣的特殊情况。如果

$$A^{mn} = A^{nm} \tag{3.20}$$

则该张量叫做对称的。

另一方面如果

$$A^{mn} = -A^{nm} \tag{3.21}$$

时，则该张量叫做反对称的。很明显所有的（2阶的）张量根据恒等式

$$A^{mn} = \frac{1}{2}(A^{mn} + A^{nm}) + \frac{1}{2}(A^{mn} - A^{nm}) \tag{3.22}$$

可分解为对称部分和反对称部分。上式右边第一项是对称张量，第二项是反对称张量，这种对称张量和反对称张量的分解，在弹性论（3.6 节）还要出现。对称部分和反对称部分函数的这种分解在量子力学里是极为重要的。

习 题

3.1.1 (a) 证明

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix} \text{与} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$$

为张量。

(b) 证明

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} \text{与} \quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} xy & y^2 \\ x^2 & -xy \end{pmatrix}$$

不是张量。

3.1.2 在某特定坐标系里张量 **A** 和张量 **B** 的对应分量相等，即 $A^0_{ij}=B^0_{ij}$

试证明此时张量 **A** 等于张量 **B**，即在所有坐标系里

$$A_{ij}=B_{ij}.$$

3.1.3 某任意阶数的张量的分量在某特定坐标系为 0 时，试证明其分量在所有坐标系里皆为0。

注意：在广义相对论的四维曲率空间里，这一点极为重要。如果能表示成张量的某个量在某一坐标系中不为 0 时，则在所有坐标系里不为 0，这个结果并不限定于某特定坐标系的选择。（象牛顿力学里离心力和科里奥赖力）。

3.1.4 某四维矢量的开始 3 个分量在两个基准系为 0。假定其中第 2 基准系不仅仅是将第 1 基准系围绕 x_4 轴旋转时，即系数 $a_{i4}(i=1,2,3)$ 当中至少有一个不为 0 时，证明该矢量的第 4 分量在所有基准系里为 0。这个事实换成相对论力学的话来说，就是若动量在两个洛伦兹系里守恒时，则能量在所有的洛伦兹系里守恒

3.1.5 研究一般二阶张量围绕坐标轴旋转 90° 及 180° 时，会产生什么结果，证明各向同性的二阶张量必须是 δ_{ij} 的常数倍。

3.1.6 广义相对论里，4 维 4 阶黎曼克里斯托菲曲率张量 R_{iklm} 满足下列关系

$$R_{iklm} = -R_{ikml} = -R_{kilm}$$

角标是从 1 到 4，根据上式独立分量的数目由 256 个减少到 36 个，试证明根据条件

$$R_{iklm} = R_{lmik}$$

独立分量的数目减少到 21 个。最后，如果该分量满足$R_{iklm}+R_{ilmk}+R_{imkl}=0$ 时，试证明独立分量变成 20个。

注意：最后一个 3 项恒等式，只有四个角标都不同时，才给出新的信息，这时独立分量的数目减少到三分之一。

3.1.7 T_{iklm} 就所有成对角标来讲是反对称的。试问它（在三维空间里）有多少个独立分量。

3.2 缩并，直积

在处理矢量时，我们把对应分量之积加起来得到标量积（1.3 节），即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_i B_i \text{（求和规则）} \tag{3.23}$$

在张量分析里把这个式子推广即所谓缩并手续。使逆变角标和协变角标相等时，再就（当然要以求和规则为依据）这些相等角标求和，比如将 2 阶混合张量进行缩并时

$$B'^{i}_{j} \to B'^{i}_{i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial x'_i}B^{k}_{l} = \frac{\partial x_l}{\partial x_k}B^{k}_{l} \tag{3.24}$$

上式是利用了（3.18）再根据（3.19），有

$$B'^{i}_{i} = \delta^{l}_{k}B^{k}_{l} = B^{k}_{k} \tag{3.25}$$

这里缩并后的 2 阶混合张量为不变量，因而是标量[●]。这个标量在 1.3 节是两个矢量的内积，另外在 1.7 节里得到的矢量的散度。一般经过缩并操作后张量的阶数要减少 2。

[●] 在矩阵理论里，这个标量不外乎是矩阵的迹，4.2节。

使协变矢量（一阶张量）的分量 a_i 和逆变矢量（一阶张量）的分量 b^j 分别相乘得一般项 $a_i\,b^j$ 的形式。这个量根据（3.13）实际上是二阶张量，原因是

$$a'_i b'^j = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} a_k \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} b^l = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i}\ \frac{\partial x'_j}{\partial x_l}(a_k b^l) \qquad (3.26)$$

成立，所以缩并之，有

$$a'_i a'^i = a_k b^k \qquad (8.27)$$

正是通常的标量积。

如上所述将两个矢量 a_i 和 b^j 结合起来的操作叫做直积。两个矢量的情形，它们的直积是二阶张量。用相同的办法我们可对 $\nabla \boldsymbol{E}$ 给一定的意义，这虽然在矢量分析的范围内未定义过，而一般两个张量的直积，得到阶数为原来两张量阶数之和的张量。即

$$A^i_j B^{kl} = C^{ikl}_j, \qquad (3.28)$$

这里 C^{ikl}_j 为四阶张量。

到目前为止总是把协变变换和逆变变换明确分开，所以如此，就是因为在非直角坐标空间里这两个变换实际上不相同，而且这个不同在广义相对论里是极为重要的。对这一点有兴趣的读者请参考这个领域有关的许多优秀专著，在这一章里，以后只限于讨论直角坐标系。于是如 3.1 节所强调的不再有逆变性与协变性的差别，因而以后角标都写成下标。这里再重新阐述求和规则和缩并操作。

求和规则　角标(不是数而是字母的情形)在等式一方重复出现时，即认为求和。

缩并　所谓缩并是将不相等的角标（下标）等置后按求和规则求和。

习　题

3.2.1 如果 $T_{\cdots i}$ 为 n 阶张量时，证明 $\partial T_{\cdots i}/\partial x_j$ 为 $n+1$ 阶张量（直角坐标）。

注意：在非直角坐标系里，系数 a_{ij} 一般是坐标的函数，将 n 阶张量单单进行微分以后除 $n=0$ 的特殊情形以外，不再是张量。只限于 $n=0$ 的情形，微分时根据（3.11）产生协变矢量（1 阶张量）。

3.2.2 假设 $T_{ijk\cdots}$ 为 n 阶张量时，证明 $\Sigma\partial T_{ijk\cdots}/\partial x_j$ 为 $n-1$ 阶张量（直角坐标）。

3.2.3 算符

$$\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

让 $x_4=ict$，则可写成

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_i{}^2}$$

这是四维的拉普拉斯通常叫做达朗贝尔算符。可用$\Box^2$表示，试证明它是标量算符。

3.3 商的规则

假设 A_i 和 B_j 为矢量时，如 3.2 节，容易看出 A_iB_j为二阶张量，这里考虑各种相反的关系，如

$$K_iA_i=B \qquad (3.29\text{a})$$

$$K_{ij}A_j=B_i \qquad (3.29\text{b})$$

$$K_{ij}A_{jk}=B_{ik} \qquad (3.29\text{c})$$

$$K_{ijkl}A_{ij}=B_k \qquad (3.29\text{d})$$

$$K_{ij}A_k=B_{ijk} \qquad (3.29\text{e})$$

在这些表达式里，A 和 B 分别为由角标数目所代表的

阶数的已知张量，特别是让 A 为任意张量。不管哪种情况 K 都是未知量。我们的目的是搞清楚 K 的变换性质。商的规则所强调的是：如果现在所面临的方程在所有的（旋转后）的直角坐标系里成立的话，则 K 为指定阶数的张量。举一例子（3.29 b）．在带撇的坐标系里

$$K'_{ij}A'_j = B'_i = a_{ik}B_k \tag{3.30}$$

上式的最后结果利用了 B 具有矢量的变换性的结果。而上式在所有旋转后的直角坐标系里成立，所以有

$$a_{ik}B_k = a_{ik}(K_{kl}A_l) \tag{3.31}$$

把 A 再一次变回到带撇的坐标系●时（参考(3.9)），有

$$K'_{ij}A'_j = a_{ik}K_{kl}a_{jl}A'_j \tag{3.32}$$

整顿之，得

$$(K'_{ij} - a_{ik}a_{jl}K_{kl})A'_j = 0. \tag{3.33}$$

这对于角标 i 的各个数值，或所有带撇的坐标系必须成立。因 A'_j 是任意的●，我们得到如下结论

$$K'_{ij} = a_{ik}\, a_{jl}K_{kl} \tag{3.34}$$

这正是二阶张量的定义。

其它式子也可以完全用相同的办法处理，可得到商的规则的其它形式。要稍加注意容易发生错误之点是如果 B 为 0 时，就不一定能适用，因为 0 的变换性是不定的。

●在这个逆变换里要特别注意方向余弦 a_{jl} 的角标的次序，$A_l = \sum_j \frac{\partial x_l}{\partial x'_j}A'_j = \sum_j a_{jl}A'_j$.

●比如取 $A'_l = 1$，$A'_m = 0\,(m \neq l)$ 即可，于是 $K'_{il} = a_{ik}a_{ll}k_{kl}$，(3.34) 剩下的分量可以通过适当选择任意的 A'_j 而推导出来。

习 题

3.3.1 就任意两个矢量 A_i，B_j 来讲，2 重和 $\sum_{i,j} K_{ij}A_iB_j$ 为不变量。证明 K_{ij} 为二阶张量。

注意：从 2 次形式 ds^2（不变量）$= g_{ij}dx_idx_j$ 来看，说明度规 g_{ij} 为张量。

3.3.2 不管坐标系怎样旋转等式 $K_{ij}A_{jk} = B_{ik}$ 都是成立的，若 A，B 为二阶张量时，证明 K 也是二阶张量。

3.3.3 代表平面波的指数函数的因子为 $\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]$。认为 $x_\mu = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ ict)$ 为闵可夫斯基空间的矢量的典型。若 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t$ 在洛伦兹变换下（3.3 节）是标量时，证明 $k_\mu = (k_1,\ k_2,\ k_3,\ i\omega/c)$ 为闵可夫斯基空间的矢量。

3.4 赝张量，对偶张量

到目前为止，坐标变换仅限于旋转。现在来考虑镜象映射或反演的效应。现在让变换系数 $a_{ij} = -\delta_{ij}$ 时，根据 (3.17)，有

$$x_i = -x_i' \tag{3.35}$$

代表反演。须注意这个变换是把开始的右手系变成左手系，把具有分量 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 变换成 $\boldsymbol{r}' = (x_1',\ x_2',\ x_3') = (-x_1,\ -x_2,\ -x_3)$。这个新的矢量 $\boldsymbol{r}'$ 对变换后的新坐标轴来讲具有负的分量。如图 3.1 所示，将坐标轴和分量的符号都改变的结果，则矢量（空间中的箭头）本身和变换前完全一样。位置矢量 $\boldsymbol{r}$，或对坐标系的镜象映射或反演与此有相同行为的矢量都叫做极矢。用两个极矢的外积定义的矢量，会发生根本的不同。现在让 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$。其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是极矢。根据 1.4 节的 (1.33)$C_x = A_yB_z - A_zB_y$，

$C_y = A_z B_x - A_x B_z$，$C_z = A_x B_y - A_y B_x$。则 C 的分量为

$$C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \tag{3.36}$$

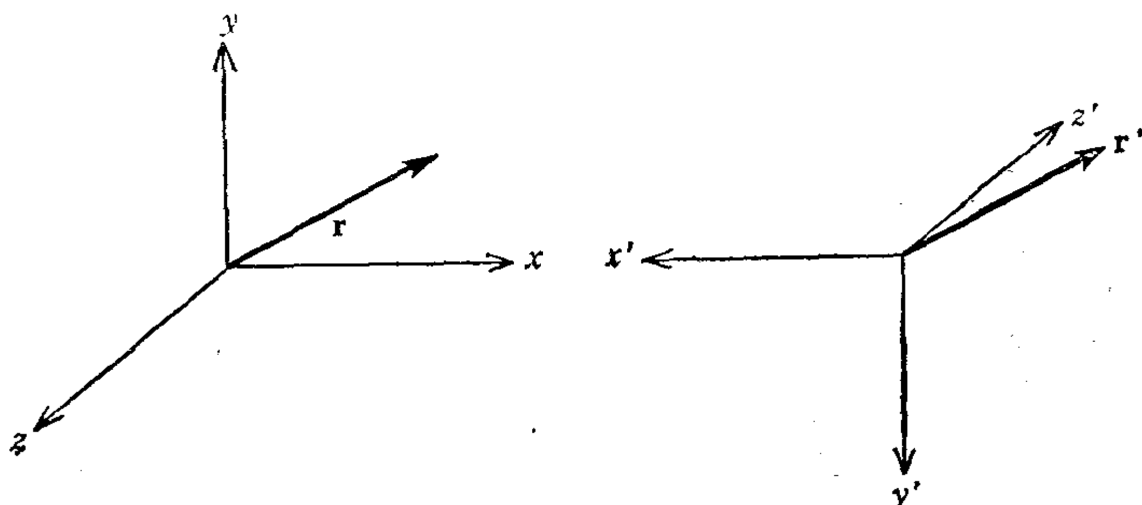


图 3.1　直角坐标的反演——极矢

以及 C_2，C_3 也可得类似的式子。将坐标系反演时，$A_i \to -A_i$，$B_j \to -B_j$，但根据 C 的定义有 $C_k \to C_k$。即作为外积来定义的矢量 C 对反演来讲和极矢的行为不同。为区别起见把这种矢量叫做赝矢量或轴矢（量）（参考图 3.2）。这种

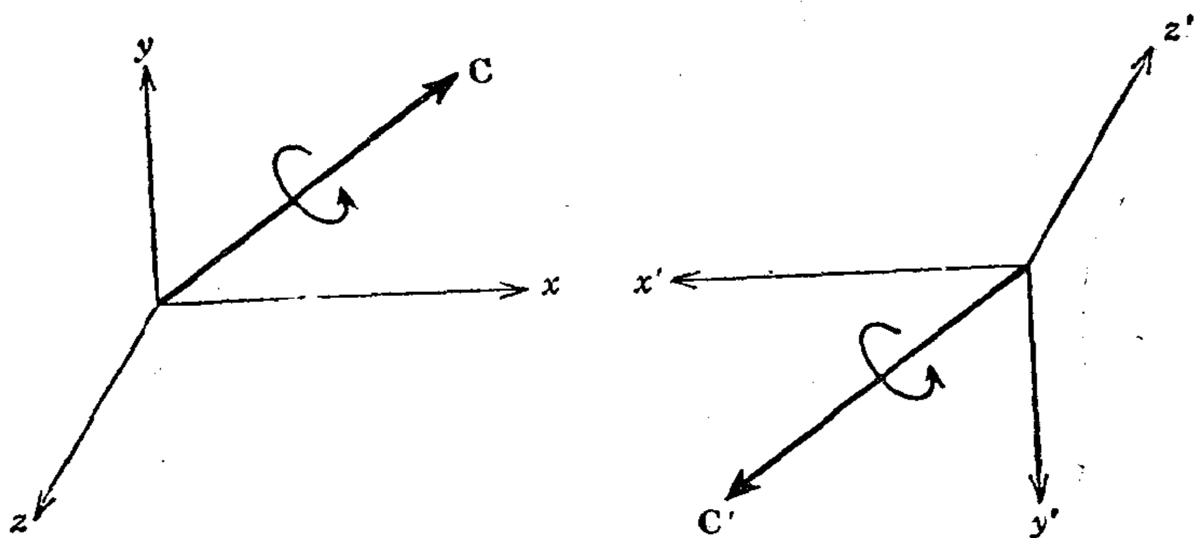


图 3.2　直角坐标的反演——轴矢

外积在描述旋转时经常出现，常使用轴矢这个名词，例如

角速度　$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$,

角动量　$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$,

转　矩　$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$,

磁感应强度的时间变化率 $\partial\boldsymbol{B}/\partial t=-\nabla\times\boldsymbol{E}$. 这说明轴矢在初等物理学里已屡见不鲜。一般不太注意的一个事实是，在右手坐标系里轴矢 $\boldsymbol{C}$ 伴随着由右手规则所确定的旋转方向。在反演后的左手坐标系里旋转方向按左手规则。这如图3.2所示的弯箭头表示。

如果我们认识到使用右手坐标系也好，左手坐标系也好并不会给宇宙带来什么变化，当然极矢和轴矢相加没有什么意义。在矢量等式 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，要求 $\boldsymbol{A}$ 也好 $\boldsymbol{B}$ 也好双方都是极矢或双方都是轴矢[❶]。相同的限制也适用于标量和赝标量以及一般在后面要考虑的张量和赝张量。

一般赝矢量或赝张量按

$$C_i'=|a|a_{ij}C_j,$$

$$A_{ij}'=|a|a_{ik}a_{jl}A_{kl} \tag{3.37}$$

进行变换，其中 $|a|$ 为系数 a_{mn} 的矩阵的行列式。对反演的行列式为

$$|a|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-1 \tag{3.38}$$

对一根轴例如 x 轴的镜象映射为

$$|a|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \tag{3.39}$$

---

❶这个事实的一个重大例外是 β 衰变，即发生于弱相互作用。在这种情况下宇宙应分为右手系和左手系，于是我们也可使极矢相互作用和轴矢相互作用相加。

行列式仍是$|a|=-1$.另外对所有的纯旋转经常有$|a|=+1$。这在4.3节还要讨论。能按（3.37）变换的量也经常叫做张量密度。这些量只要对旋转情形和一般张量相同，并只有在镜象映射、反演和张量不同，其差别是由于行列式$|a|$的缘故而出现负号。

第1章里，已知道标量三重积$\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$为标量。现在考虑按（3.35）所规定的变换时立即可知$S\rightarrow -S$。总之标量三重积实际上是赝标量。这个事实从三重积代表体积的所谓几何意义可以看出。把立方体的三个参数长、宽、高都由正的距离变为负的距离时，理所当然这三者的乘积是负的。

体积元有赝标量的性质会引出重要的结论。在麦克斯韦方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

里，让∇和$\boldsymbol{E}$为极矢，ε_0为标量。于是单位体积的电荷ρ必须是标量。但体积为赝标量。结果电荷也是赝标量。

为了以后应用上方便起见，引入三维列维·契维塔符号ε_{ijk},它的定义为

$$\begin{gathered}\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=+1,\\ \varepsilon_{321}=\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=-1,\\ \text{其它所有 }\varepsilon_{ijk}=0\end{gathered}\tag{3.40}$$

现在有一个三阶的赝张量δ_{ijk}，如果认为在一个特定坐标系里和ε_{ijk}一致，于是根据赝张量的定义有

$$\delta_{ijk}=|a|a_{ip}a_{jq}a_{kr}\,\varepsilon_{pqr}.\tag{3.41}$$

将行列式直接展开时，有

$$a_{1p}\,a_{2q}\,a_{3r}\,\varepsilon_{pqr}=|a|\tag{3.42}$$

这个事实表示$\delta_{123}=|a|^2=1=\varepsilon_{123}$。对其它可能性也要逐

个进行分析，结果表明对旋转也好镜象映射也好

$$\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \tag{3.43}$$

由此可知 ε_{ijk} 为赝张量●。另外还知道在所有旋转后的坐标系里它是有相同分量的各向同性的赝张量。

对任意二阶反对称张量 C_{ij}(在三维空间）来讲能利用

$$C_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}C_{jk} \tag{3.44}$$

来定义的对偶赝张量相对应。其中反对称张量 C_{jk} 可写成

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & -C_{31} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ C_{31} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

我们知道，因 C_i 是 5 阶（赝)张量 $\varepsilon_{ijk}C_{mn}$ 的 2 重缩并所以对旋转来说作为矢量进行变换，然而实际上由于 ε_{ijk} 为赝张量，故 C_i 为赝矢量．具体讲 $\boldsymbol{C}$ 的分量由

$$(C_1, C_2, C_3) = (C_{23},\ C_{31},\ C_{12}) \tag{3.46}$$

确定.角标的循环次序是 ε_{ijk} 的循环次序的结果.由（3.46）所规定的这种对偶性，三维矢量积可认为赝矢量，也可以认为是二阶的反对称张量，这意味着究竟写哪个可自由选择。

如果有 3 个（极）矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 时，可定义

$$V_{ijk} = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_j & B_j & C_j \\ A_k & B_k & C_k \end{vmatrix}$$

$$= A_iB_jC_k - A_iB_kC_j + \cdots \tag{3.47}$$

推广 3.1 节的分析，可看出各项 $A_pB_qC_r$ 是三阶张量．结果 V_{ijk} 为三阶张量。从行列式的定义可知它是完全反对称的，交换任意两个角标，即交换行列式的任意的列会改变符号，

● ε_{ijk}的用处在这一节以外还有.比如习题 4.2.15 的矩阵M_k 让$(M_k)_{ij}=i\varepsilon_{ijk}$。

其对偶量为

$$V=\frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}V_{ijk} \tag{3.48}$$

很明显是赝标量. 展开后

$$V=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \tag{3.49}$$

为熟知的标量三重积。

为在3.7节用来表示麦克斯韦方程的协变性，把这个对偶矢量分析推广到4维空间，特别是要阐明4维体积元 $dx_1dx_2dx_3dx_4$ 为赝标量。

我们把3维的 ε_{ijk} 向4维推广，引入列维·契维塔符号 ε_{ijkl}。这个量 ε_{ijkl} 就4个角标可定义为反对称的。如果 $(ijkl)$ 是(1，2，3，4)的偶置换为+1，如果是奇置换则为-1。根据确定 ε_{ijk} 的性质的相同分析，可证明列维·契维塔符号 ε_{ijkl} 为四阶赝张量。现在引入由极矢 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 构成的四阶张量

$$H_{ijkl}=\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i & D_i \\ A_j & B_j & C_j & D_j \\ A_k & B_k & C_k & D_k \\ A_l & B_l & C_l & D_l \end{vmatrix} \tag{3.50}$$

可定义对偶量

$$H=\frac{1}{4!}\varepsilon_{ijkl}H_{ijkl} \tag{3.51}$$

这里取4重和时阶数变为0。由于 ε_{ijkl} 为赝张量，故 H 为赝标量。现在假定 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 为沿着4根坐标轴（闵可夫斯基空间）的无穷小位移。

$$\boldsymbol{A}=(dx_1,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$$\boldsymbol{B}=(0,\ dx_2,\ 0,\ 0)\ 等等 \tag{3.52}$$

$$H=dx_1dx_2dx_3dx_4 \tag{3.53}$$

这样就可把 4 维体积元看成赝标量．我们要在 3.7 节利用这一结果．这结果实际上是狭义相对论的必然结果．$dx_1dx_2dx_3$ 的洛仑兹·菲左收缩刚好和时间延迟相互抵消的缘故．

我们只是作为 3 维空间在数学上的扩展而进入 4 维空间的讨论．实际上按着相同的要领可以进行 5 维、6 维、或普遍的 N 维空间的讨论．这也可以说是证明了用张量分量进行分析的优越性的典型情形．在物理上，这个 4 维空间通常可解释为闵可夫斯基空间

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x,y,z,ict) \tag{3.54}$$

其中 t 为时间．这是通过狭义相对论完成了空间和时间的"融合"．描述 4 维的旋转的变换就是狭义相对论的洛仑兹变换．

在若干应用当中，尤其在角动量量子论当中的应用都不能说直角坐标张量是特别方便的．用数学语言来讲，我们的一般二阶张量是可约的．所谓可约是意味着能够分离成若干个阶数更低的张量．实际上我们已做过这样的分离．从(3.25)可知

$$A=A_{ii} \tag{3.55}$$

是标量，是 A_{ij} 的矩阵的迹●（固有和）．
这表明反对称部分

$$B_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}-A_{ji}) \tag{3.56}$$

和赝矢量相同．即

$$B_{ij}=C_k\ 以及\ i,\ j,\ k\ 的循环交换 \tag{3.57}$$

●利用不同矩阵的方法在4.3节里讨论．参考习题4.3.8．

由原来张量减去标量 A 和矢量 C_k，得到既约的对称的，且矩阵的迹为 0 的二阶张量 S_{ij}。S_{ij} 可写成有独立分量的

$$S_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})-\frac{1}{3}A\delta_{ij} \tag{3.58}$$

于是最后直角坐标张量可写成

$$A_{ij}=\frac{1}{3}A\delta_{ij}+C_k+S_{ij} \tag{3.59}$$

三个量 A，C_k，S_{ij} 是分别能象对 $L=0$，1，2 的球谐函数 Y_L^M 那样变换的阶数为 0，1，2 的球面张量。这种球面张量或它的使用的有关详细介绍可在 Rose 的书里找到。

上述的简洁的具体例子是对称的电器极矩张量

$$Q_{ij}=\int(3x_ix_j-r^2\delta_{ij})\rho(x_1,\ x_2,\ x_2)\mathrm{d}^3x$$

的情形。$-r^2\delta_{ij}$ 表示减去矩阵的迹（3 个 $i=j$ 的项)。这个结果出现的 Q_{ij} 的矩阵的迹为0。

习　题

3.4.1 反对称的正方矩阵由

$$\begin{pmatrix} 0 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & 0 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

规定．其中 $(C_1,\ C_2,\ C_3)$ 为赝矢量。假设下列关系式

$$C_i=\frac{1}{2!}\varepsilon_{ijk}C_{jk}$$

对所有坐标系成立，证明 C_{jk} 为张量（这是商定理的另一形式）。

3.4.2 证明矢量积为 3 维空间所特有的，也就是说只有在 3 维空间里在（2阶的）反对称张量的分量和矢量分量之间有1对 1 的对应。

3.4.3 证明下列式子成立

(a) $\delta_{ii}=3$,

(b) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}=0$,

(c) $\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jpq}=2\delta_{ij}$,

(d) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6$。

3.4.4 证明

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk}=\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}$$

3.4.5 (a) 将矢积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的分量用 ε_{ijk} 和 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的分量来表示。

(b) 利用 ε_{ijk} 反对称性质证明 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$

答 (a) $C_i=\varepsilon_{ijk}A_jB_k$

3.4.6 (a) 证明 4.6 节的转动惯量张量（矩阵）可写成

$$I_{ij}=m(x_nx_n\delta_{ij}-x_ix_j)$$

(b) 就处于 $(x_1x_2x_3)$ 质量为 m 的粒子，证明

$$I_{ij}=-M_{il}M_{lj}=-m\varepsilon_{ilk}x_k\varepsilon_{ljm}x_m$$

但 $M_{il}=m^{1/2}\varepsilon_{ilk}x_k$ 这是两个 2 阶张量的缩并和 4.2 节矩阵的积相同。

3.4.7 将 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$ 和 $\nabla\times\nabla\varphi$ 用 ε_{ijk} 改写之，使得一看这些式子就知道都是 0。

答 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}A_k$

$$(\nabla\times\nabla\varphi)_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi$$

3.4.8 用列维·契维塔符号（ε_{ijk}）来表示矢量积，并推导出 *BAC-CAB* 规则

$(\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}(1.50))$。

3.4.9 证明下列四阶张量都是各向同性的，即具有和坐标系的任意旋转无关的形式。

(a) $A_{ijkl}=\delta_{ij}\delta_{kl}$

(b) $B_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}$

(c) $C_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}$

3.5 并矢式

我们经常尤其是在稍老的文献或老的讲义里，使用并矢或并矢式这个词。所谓并矢式对通常的矢量分析虽没有什么用可是能推广到二阶张量。把两个矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 结合起来作成 $\boldsymbol{ij}$ 时就能得到并矢。从左边相乘（将标量或矢量）作出和左侧的矢量的积即可，右侧的矢量可以原封不动放在那里

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}=[(\boldsymbol{i}A_x+\boldsymbol{j}A_y+\boldsymbol{k}A_z)\cdot\boldsymbol{i}]\boldsymbol{j}=A_x\boldsymbol{j} \tag{3.60}$$

从右边相乘刚好与上述做法相反即可，即

$$\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}[\boldsymbol{j}\cdot(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})]=\boldsymbol{i}A_y \tag{3.61}$$

由此可知，一般乘法操作是不可对易的。必须强调指出 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 相互之间没有什么作用。如果组成并矢的两个单位矢量分别乘以标量系数的话虽乘在一起，但对单位矢量来讲它们既不是内积关系也不是外积关系，只是把两个矢量并列在一起而已。但次序却很重要，$\boldsymbol{ij}\neq\boldsymbol{ji}$。于是得到多少与次序有关的合成量。这种对次序的依存性质研究矩阵（第 4 章）或复数还会遇到。所谓复数顾名思义不外乎是由有次序的两个实数组成。

推广上述作法，把两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 结合起来作成

$$\begin{aligned}\mathrm{T}=\boldsymbol{AB}&=(\boldsymbol{i}A_x+\boldsymbol{j}A_y+\boldsymbol{k}A_z)(\boldsymbol{i}B_x+\boldsymbol{j}B_y+\boldsymbol{k}B_z)\\&=\boldsymbol{ii}A_xB_x+\boldsymbol{ij}A_xB_y+\boldsymbol{jk}A_xB_z\\&\quad+\boldsymbol{ji}A_yB_x+\boldsymbol{jj}A_yB_y+\boldsymbol{jk}A_yB_z\\&\quad+\boldsymbol{ki}A_zB_x+\boldsymbol{kj}A_zB_y+\boldsymbol{kk}A_zB_z\end{aligned} \tag{3.62}$$

量 T $= \boldsymbol{AB}$ 是由并矢的线性组合所构成的并矢式。我们已证明过这种乘积 $\boldsymbol{AB}$ 为 2 阶张量（3.2 节）。由此可知，并矢式是 2 阶张量，但可以写成保持矢量性质的形式。另一方面作为张量的变换性质仍是有些含糊。

已注意到矢量和并矢式的乘积是不可对易的，但有交换这一操作的特殊和重要的情况。取并矢 $\boldsymbol{AB}$ 让

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{a} \tag{3.63}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 为任意矢量，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}$ 时

$$A_x\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}B_x$$

假设 $\boldsymbol{i}A_xB_x+\boldsymbol{j}A_xB_y+\boldsymbol{k}A_xB_z=\boldsymbol{i}A_xB_x+\boldsymbol{j}A_yB_x+\boldsymbol{k}A_zB_x$

$$\tag{3.64}$$

即得

$$\begin{aligned}A_xB_x&=A_xB_x\\A_xB_y&=A_yB_x\\A_xB_z&=A_zB_x\end{aligned} \tag{3.65}$$

这表明 $\boldsymbol{A}=C\boldsymbol{B}$ 但 C 为常量。换句话说，若和任意矢量的乘法可对易时并矢式必须是对称的，并矢 $\boldsymbol{pq}$ 的系数等于并矢 $\boldsymbol{qp}$ 的系数。相反，若并矢式是对称的话则乘法是可对易的。

对称并矢式的最重要性质之一是通过坐标轴的适当选择经常能把它写成对角形式：

$$\mathrm{T}\to\boldsymbol{ii}T_{xx}+\boldsymbol{jj}T_{yy}+\boldsymbol{kk}T_{zz} \tag{3.66}$$

非对角的系数皆为 0。大家知道使并矢式变成对角形的坐标变换为主轴变换。这在 4.6 节还要详细讨论。

对称并矢式有着有趣的几何解释。为简单起见假定对称并矢式 T 已是对角形的。下面，取通常的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$ 作出方程

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{r}=1 \tag{3.67}$$

这个式子根据 $\boldsymbol{r}$ 的方向来限制其长度。将(3.67)展开之，有

$$(\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z)\cdot(\boldsymbol{ii}T_{xx}+\boldsymbol{jj}T_{yy}+\boldsymbol{kk}T_{zz})\times$$
$$\times(\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z)=1$$
$$x^2T_{xx}+y^2T_{yy}+z^2T_{zz}=1 \tag{3.68}$$

这个式子定义了具有由

$$a=T_{xx}^{-1/2},\quad b=T_{yy}^{-1/2},\quad c=T_{zz}^{-1/2} \tag{3.69}$$

的 a, b, c 为主半径的椭圆面。使并矢式对角化相当于将并矢式椭圆面变到让它的轴和坐标轴平行。

若 $\boldsymbol{U}$ 为反对称并矢式

$$U_{xx}=0\ \text{等等}$$
$$U_{xy}=-U_{yx}\ \text{等等}$$

时，对任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 成立

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{U}=-\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{a} \tag{3.70}$$

总之矢量和反对称并矢式的乘法遵从反对易律（参考习题3.5.4 (a)）。

并矢式（对坐标的旋转所谓变换的概念变得隐晦起来）和一般的张量分析相比处理起来颇为不便。要表示三阶或更高阶的张量使用并矢式更加困难。于是我们仍回到张量分析，并矢式的写法也就到此为止。

习　　题

3.5.1 如（3.6),(3.8) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可作为矢量进行变换时，证明并矢式满足张量的变换律（3.13）.

3.5.2 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}$ 对任意矢量 $\boldsymbol{V}$ 在

$$\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}$$

的意义下证明它是单位并矢式。各个并矢 $\boldsymbol{ii}$ 等等是

量子力学当中投影算符的特例。

3.5.3 证明 $\nabla \boldsymbol{r}$ 等于单位并矢式 $\mathbf{I}$。

3.5.4 $\boldsymbol{U}$ 为反对称并矢式，$\boldsymbol{V}$ 为矢量时，证明下列各式

(a) $\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{U}=-\mathrm{U}\cdot\boldsymbol{V}$

(b) $\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{U}\cdot\boldsymbol{V}=0$

3.5.5 2 维矢量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y$ 和 $\boldsymbol{t}=-\boldsymbol{i}y+\boldsymbol{j}x$ 通过张量方程 $\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{U}=\boldsymbol{t}$ 相联系。

(a) 利用到上节为止按照张量分量的描述求张量 U

(b) 作为并矢式处理求 U。

3.5.6 根据研究分子相互作用以

$$\boldsymbol{e}_{12}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|}$$

所确定的单位相对位置矢量 $\boldsymbol{e}_{12}$ 作出一个并矢式，对

$$\mathrm{U}=\mathrm{I}-3\boldsymbol{e}_{12}\boldsymbol{e}_{12}$$

证明 trace $\mathrm{U}\cdot\mathrm{U}=6$。$\mathrm{I}$ 为单位并矢式，即 $\mathrm{I}=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}$。

3.5.7 证明对并矢式来讲，高斯定理

$$\int_s \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{D}=\int_v \nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau$$

成立

3.5.8 证明

$$\int_s \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\boldsymbol{E}+\int_s \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})-\int_s \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

$\boldsymbol{E}$ 为位置的矢量函数。积分是就单连通闭曲面进行的。实际上这个面积分的组合在基尔霍夫的矢量折射理论里会出现。

3.5.9 证明下列矩阵的迹为 0，对称张量

$$\mathbf{t}^0 = (2\boldsymbol{kk} - \boldsymbol{ii} - \boldsymbol{jj})/\sqrt{6}$$

$$\mathbf{t}^{\pm 1} = \mp \frac{1}{2}(\boldsymbol{ik} + \boldsymbol{ki}) - i\frac{1}{2}(\boldsymbol{jk} + \boldsymbol{kj})$$

$$\mathbf{t}^{\pm 2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{ii} - \boldsymbol{jj}) \pm i\frac{1}{2}(\boldsymbol{ij} + \boldsymbol{ji})$$

满足 2 重缩并关系

$$t_{ij}^{m*} t_{ij}^{n} = \delta_{mn}$$

这些单位张量用来定义张量球谐函数即矢量球谐函数的推广。另一方面张量球谐函数用来描述引力波。

3.6 弹性理论

有外力或应力作用于弹性体时，则弹性体由于变形而产生应变。用张量来描述弹性的研究自然要分为三个部分。第1，弹性物质的应变或变形的描述。第2，产生该变形的力或应力的描述。最后，用张量形式写出代表应力、应变之间关系的普遍的虎克定律。

弹性应变：形变　弹性体的形变可通过以某种外部应力作用时，根据其各部分相对位置的变化来描述。考虑对某固定原点，位于 $\boldsymbol{r}$ 的位置的点 P_0 和离开 P_0 距离为 δx 的第2点 Q_0。在未发生应变的状态下相对于 P_0，Q_0 的坐标为 δx_i；发生应变的状态下，P_0 到 P_1 的位移为 $\boldsymbol{u}$，Q_0 到 Q_1 的位移为 $\boldsymbol{v}$ 时，则相对于 P_1，Q_1 的坐标为 $\delta y_i = \delta x_i + \delta u_i$。相对于 P，Q 的位置刚好是 δu_i。忽略二次以上的微分● 进行三维的泰勒展开时，有

$$\delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = (\delta \boldsymbol{x} \cdot \nabla)\boldsymbol{u},$$

● 限于一次项意味着相对形变大概在 1% 以下，在实际应用上是一个很严的限制。

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\delta x_k \qquad (3.71)$$

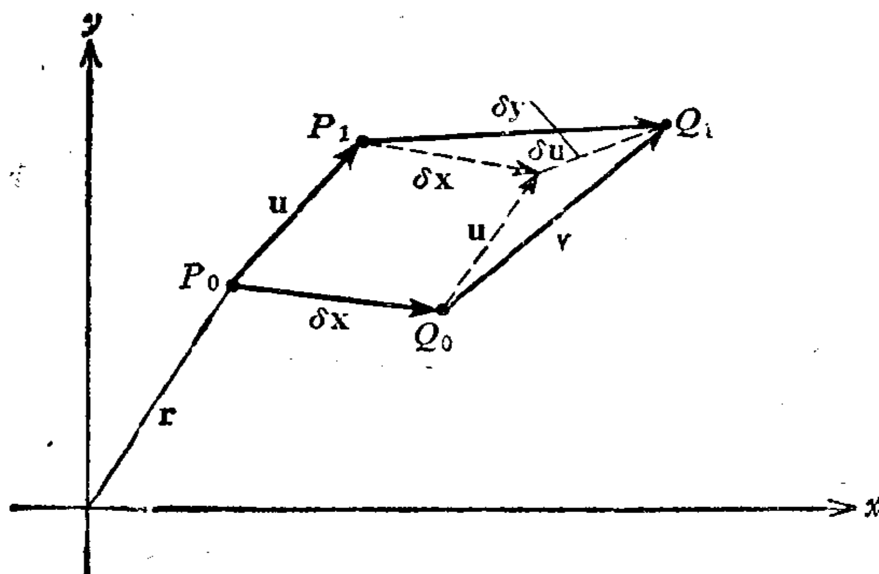


图 3.3 弹性应变

因 u_i 是矢量分量，所以 $\partial u_i/\partial x_k$ 是 2 阶张量 ∇u 的元素。把这个张量分解为对称和反对称的项，有

$$\delta u_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\delta x_k - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\delta x_k$$

$$= \eta_{ik}\delta x_k - \xi_{ik}\delta x_k \qquad (3.72)$$

反对称部分 ξ_{ik} 可认为和整体的旋转相同（完全不变形）。

从（3.4）节可考虑与 ξ_{ij} 有关的轴矢

$$\xi = \frac{1}{2}\nabla\times u \qquad (3.73)$$

对应于反对称部分 $-\xi_{ik}\delta x_k$ 的位移 δu 为

$$\delta u = \frac{1}{2}(\nabla\times u)\times\delta x \qquad (3.74)$$

这是通过 P_0 的瞬间，围绕 $\nabla\times u$ 的方向的轴进行 $|\nabla\times u|$ 弧度的旋转。

剩下的对称部分，张量η_{ij}可解释为纯粹应变张量。η_{ik}的对角元素（η_{11}，η_{22}，η_{33}）代表伸长，非对角元素代表偏移。这表明Q_0沿着x方向离开P_0，可认为$\delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{i}\delta x_1$。此时从（3.72），有

$$\begin{aligned} \delta u_1 &= \eta_{11}\delta x_1, \\ \delta u_2 &= \eta_{21}\delta x_1, \\ \delta u_3 &= \eta_{31}\delta x_1. \end{aligned} \tag{3.75}$$

从此可知，形变后的位移为

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= \delta x_1 + \delta u_1 = (1 + \eta_{11})\delta x_1, \\ \delta y_2 &= \delta u_2 = \eta_{21}\delta x_1, \\ \delta y_3 &= \delta u_3 = \eta_{31}\delta x_1. \end{aligned} \tag{3.76}$$

对无应变状态的位移$\delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{i}\delta x_1$的情形，对角元素$\eta_{11}$对$\delta \boldsymbol{y}$的第1分量（伸长）有贡献，$\eta_{21}$和$\eta_{31}$分别代表偏移对$\delta y_2$、$\delta y_3$的贡献。

应　力　对应力或力的定义必须慎重。参考图示微小体积的图3.4，作用于法线沿x_j方向的面dA在x_i方向的力为P_{ij}。P_{ij}实际上是力/面积的意义下的压力。叫应力也好力也好总要了解应该将P_{ij}乘以适当的微小面积。这些是作用

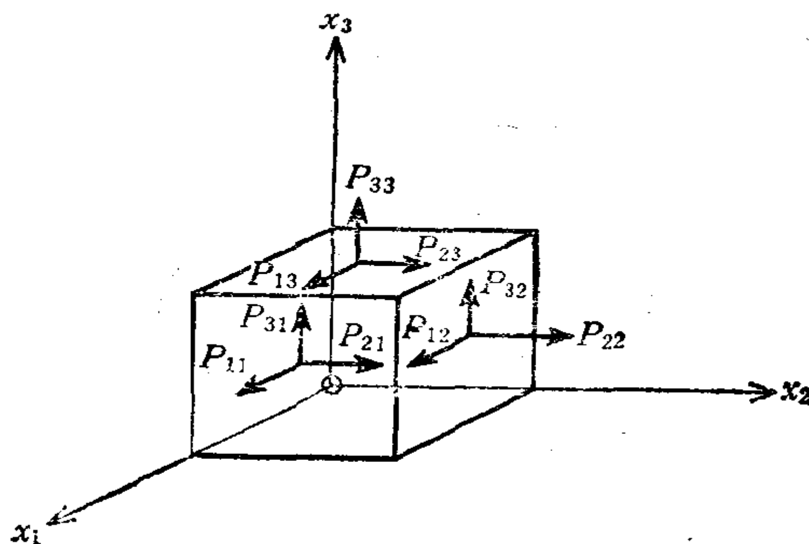


图 3.4　应力

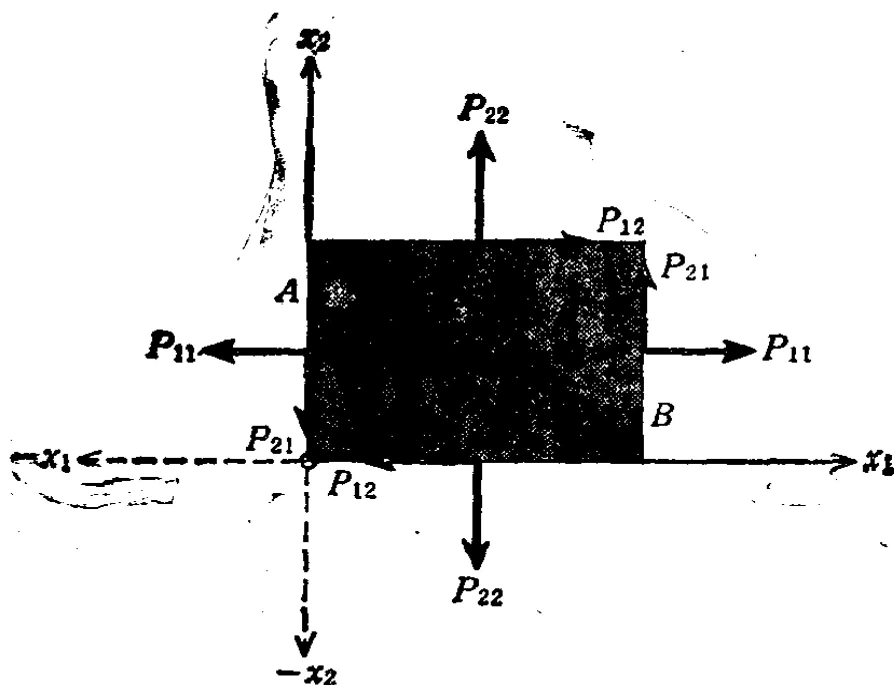


图 3.5 均匀应力——符号的反转

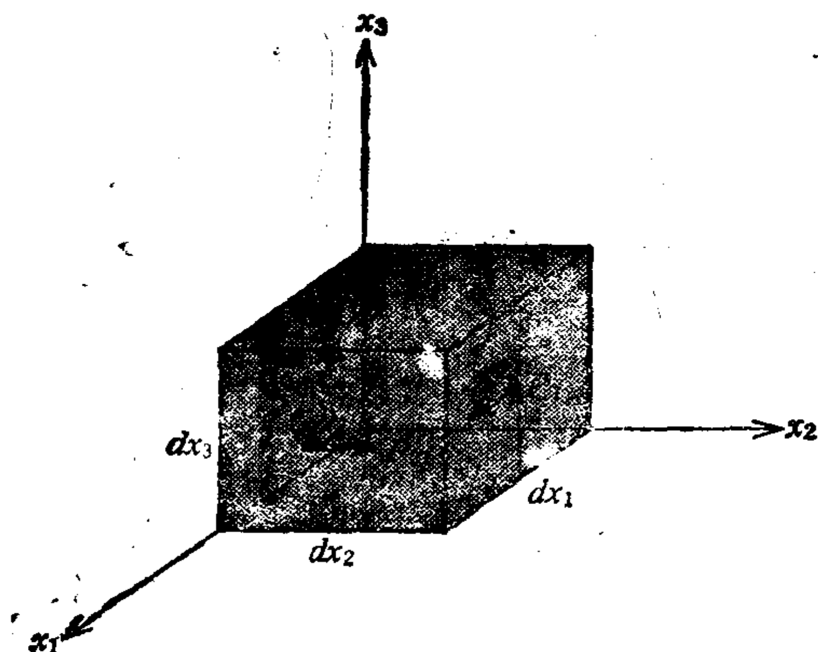


图 3.6 均匀应力——转矩的平衡

于图3.4的微小平行六面体的力。为容易看起见，只将正面的三个面上的力表示出来。假定应力是均匀的话则相反侧面的力如图3.5所示符号相反。须注意P_{21}是作用于面A（x_2方向）的切应力。均匀力的情况下面B以相同的剪切力作用

于外侧媒质。由外侧媒质作用于面 B 的应力刚好反向即向下（在 $-x_2$ 方向）为 P_{21}。在这个讨论里包含三个假定。现在要明确指出它们是：

1。对整体物体的均匀应力

2。静力学平衡的存在

3。无体积力（作用于六面体内的质量的重力），无体积转矩（作用于磁畴的外磁场）。

由这些假定对 P_{ij} 进一步加以限制。考虑作用于如图3.4和3.6所示平行六面体围绕 x_3 轴的总转矩。垂直于面的压力 P_{ii} 不提供转矩。偏移应力 P_{31} 和 P_{32} 的臂长为0。偏移应力 P_{13} 和 P_{23} 则和作用于底面（$x_3=0$）强度相同方向相反的应力相平衡。剩下的转矩有

$$P_{21}(dx_2dx_3)dx_1,$$
$$P_{12}(dx_1dx_3)dx_2 \qquad (3.77)$$

因围绕 x_3 轴没有旋转所以这些转矩必须平衡。

$$P_{21}dx_1dx_2dx_3=P_{12}dx_1dx_2dx_3,$$

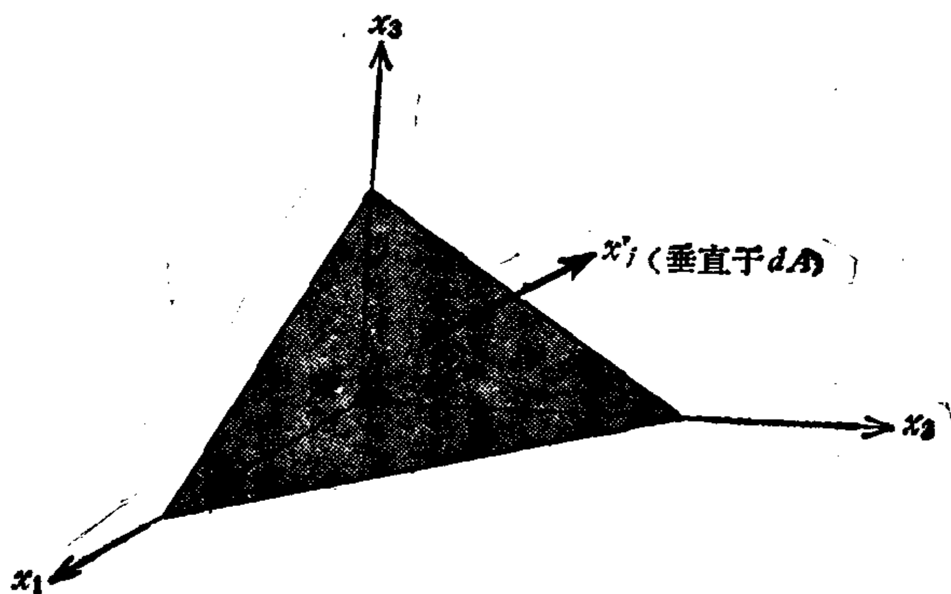


图 3.7 无穷小四面体——力的平衡

结果有

$$P_{21}=P_{12} \tag{3.78}$$

围绕 x_1 轴，x_2 轴也没有旋转所以重复相同的讨论时一般有

$$P_{ij}=P_{ji} \tag{3.79}$$

这些只是有关大小的等式并不等于说方向相同。方向由前一角标确定。

由以上可知应力（压力）P_{ij} 的分布是对称的。现在来说明这种分布是张量。为此如图 3.7 所示作一无穷小四面体它具有垂直于 x'_j 方向的面积为 dA 的斜面。作用于斜面的力为 $P'_{ij}dA$。作用于 $x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=0$的面的力分别为

$$P_{m1}(a_{j1}dA)$$

$$P_{m2}(a_{j2}dA)$$

$$P_{m3}(a_{j3}dA)$$

其中 $a_{jk}dA$ 由 $x_k=0$ 的面积上将斜面积 dA 向面 $x_k=0$ 的投影来确定。a_{jk} 为通常的方向余弦即 x'_j 轴和 x_k 轴之间的角的余弦。

力 $P_{m1}a_{j1}dA$ 的作用平行于 x_m 轴，它在 x'_i 方向的分量为 $a_{im}a_{j1}P_{m1}dA$（不就 m 求和）。如就 m 求和时，前面的表达式就确定作用于底面 $x_1=0$ 的三个力的 x'_i 分量的和。最后就三个面 $x_k=0$ 全部相加时，在静力学平衡情况下平行于 x'_i 作用的力全在内的话为

$$a_{im}a_{jk}P_{mk}dA=P'_{ij}dA \tag{3.80}$$

因面积 dA 是任意的，所以

$$P'_{ij}=a_{im}a_{jk}P_{mk} \tag{3.81}$$

成立。根据定义这个关系式，表示 P_{mk} 是张量。

应力-应变的关系：虎克定律 先假定各向同性的固体。然后再回到普遍的各向异性情形。考虑平行于 x_1 轴的

均匀棒●。加上小的拉伸应力 P_{11} 时，则

$$E\eta_{11}=P_{11} \tag{3.82a}$$

$$E\eta_{22}=-\sigma P_{11} \tag{3.82b}$$

$$E\eta_{33}=-\sigma P_{11} \tag{3.82c}$$

成立。

其中 E 为杨氏弹性模量，σ 为泊松比。再加上小的拉伸应力 P_{22}、P_{33} 时（3.82a）为

$$E\eta_{11}=P_{11}-\sigma P_{22}-\sigma P_{33} \tag{3.83}$$

为使应力-应变的关系成为线性的我们只限于讨论小的应力和小的应变。（3.83）可改写成

$$E\eta_{11}=(1+\sigma)P_{11}-\sigma(P_{11}+P_{22}+P_{33}) \tag{3.84}$$

对 $E\eta_{22}$、$E\eta_{33}$ 也具有类似的式子。

在这一节的开头就已证明过 η_{ij} 和 P_{ij} 是张量。因为我们的系统的对称性，故其非对角分量为0。为将（3.84）向取任意指向的直角坐标系推广，故进行如下变换

$$\eta'_{ij}=a_{ik}a_{jk}\eta_{kk}$$

$$P'_{ij}=a_{ik}a_{jk}P_{kk}. \tag{3.85}$$

（3.84）乘以 $a_{i1}a_{j1}$，对应于 $E\eta_{22}$ 的方程乘以 $a_{i2}a_{j2}$，对应于 $E\eta_{33}$ 的方程乘以 $a_{i3}a_{j3}$ 再把这三个方程加起来时，可得

$$Ea_{ik}a_{jk}\eta_{kk}=(1+\sigma)a_{ik}a_{jk}P_{kk}-\sigma(P_{nn})a_{ik}a_{jk} \tag{3.86}$$

利用（3.85）和（3.18），有

$$E\eta_{ij}=(1+\sigma)P_{ij}-\sigma(P'_{mm})\delta_{ij}. \tag{3.87}$$

其中

$$(P'_{mm})=(P_{nn})=P_{11}+P_{22}+P_{33} \tag{3.88}$$

是张量 P_{ij} 的缩并（所以是不变量）。

就应力 P_{ij} 解这些式子往往更方便。让 $i=j$，并进行缩

● 由于这个特殊选择我们考虑在第4章叫做主轴系的系统开始，所谓主轴系是偏移变形消失后的特殊坐标系。

并就可做到。即

$$E_{\eta jj}=(1+\sigma)P_{jj}-3\sigma P_{jj}$$
$$=(1-2\sigma)P_{jj} \qquad (3.89)$$

由于撇号是多余的故略去。再代入原来的（3.87）得

$$(1+\sigma)P_{ij}=E_{\eta ij}+\frac{E\sigma}{1-2\sigma}\eta_{mm}\delta_{ij} \qquad (3.90)$$

即
$$P_{ij}=2\mu\eta_{ij}+\lambda\eta_{mm}\delta_{ij}, \qquad (3.91)$$

这里 λ、μ 为拉梅系数，由

$$\lambda=\frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu=\frac{E}{2(1+\sigma)} \qquad (3.92)$$

确定。常数 μ 为刚性率与切变模量相同。可以认为取以（$x_3=0$）-面为底面的平行六面体有切线应力 P_{12} 作用在它上面。位移为（ηx_2，0，0），用应变张量来说时，在 $\eta_{12}=\eta_{21}=(1/2)\eta$ 以外 $\eta_{ij}=0$，由（3.91）立即可得

$$P_{12}=2\mu\cdot\frac{1}{2}\eta=\mu\eta \qquad (3.93)$$

这个式子表示 μ 是切变应力对 η 的比。

如果象静水压强那样应变是球对称的话，则有

$$\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}; \quad \eta_{12}=\eta_{13}=\eta_{23}=0 \qquad (3.94)$$

故有

$$P_{11}=3\lambda\eta_{11}+2\mu\eta_{11}=3k\eta_{11} \qquad (3.95)$$

但
$$k=\lambda+\frac{2}{3}\mu \qquad (3.96)$$

$3\eta_{11}$ 取到1次时是体积变化率所以 k 是体变模量。

不仅是各向同性的包括各向异性的固体在内在普遍情况下应力-应变的线性关系可用普遍的虎克定律

$$P_{ij}=C_{ijkl}\eta_{kl} \qquad (3.97)$$

来表示。根据商定理这里的 C_{ijkl} 是4阶张量。应力张量为

对称的，应变张量η_{kl}也是对称的，所以

$$C_{ijkl}=C_{jikl}=C_{ijlk}=C_{jilk} \tag{3.98}$$

成立，根据这一结果独立分量的数目由81（即3^4）减少到36个，又知道[1]

$$C_{ijkl}=C_{klij} \tag{3.99}$$

因此独立分量的数目进一步减少到21个。

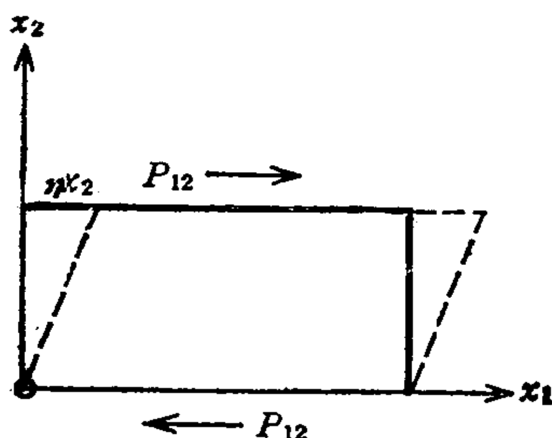


图 3.8 剪切应力——偏移

若普遍的张量方程（3.97）适用于各向同性的物体时，则弹性常数张量C_{ijkl}应为最普遍的各向同性张量的线性组合，利用习题3.4.9的结果，得

$$C_{ijkl}=a\delta_{ij}\delta_{kl}+b[\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}]+c[\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}] \tag{3.100}$$

代入（3.97）时，和以前一样，有

$$P_{ij}=a\delta_{ij}\eta_{kk}+b(\eta_{ij}+\eta_{ji})+c(\eta_{ij}-\eta_{ji}) \tag{3.101}$$

因η_{ij}是对称的，有

$$P_{ij}=a\,\eta_{kk}\delta_{ij}+2b\eta_{ij}$$

和（3.91）完全一致。

习　　题

3.6.1 3维，四阶的应力-应变张量C_{ijkl}满足

$$C_{ijkl}=C_{ijlk}=C_{jilk}$$

---

[1] 参考 I.S.Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, New York: McGraw-Hill (1956)

(a) 利用这些条件，证明 C_{ijkl} 的独立分量的数目由81个减少到36个。

(b) 再指定

$$C_{ijkl}=C_{klij}$$

时，证明独立分量的数目进一步减少到 21 个。

3.6.2 (a) 为论证泊松比 σ 不是负的，能举出什么论据?

(b) 假定切变模量 μ 和体变模量 k 都不是负的，试求出泊松比数值的上限。

答 (b) $\sigma<\frac{1}{2}$

3.6.3 试计算有微小形变的各向同性弹性体（单位体积的）的弹性势能。

答 $\frac{W}{V}=\frac{1}{2}\lambda(\eta_{ii})^2+\mu\eta_{ij}\eta_{ij}$

3.6.4 形变弹性体的势能为

$$P.E.=\frac{1}{2}C_{ijkl}\,\eta_{ij}\,\eta_{kl}$$

且弹性体具有立方对称性时

(a) 证明当那一个角标（1，2，3或x，y，z）出现奇数次时，则 C_{ijkl} 为 0 即

$$C_{1112}=0$$

提示：将出现奇数次的坐标反演之

(b) 证明对整个 15个元素只剩下三个独立的不为 0 的弹性常数，即

$$C_{1111}=C_{2222}=C_{3333}$$

$$C_{1122}=C_{2211}=C_{1133}\ \text{等等}$$

$$C_{1212}=C_{2121}=C_{1313}\ \text{等等}$$

3.6.5 现在假定弹性体是各向同性的，C_{ijkl} 有 15 个不为 0

的分量，试用杨氏模量 E 和泊松比 σ 来表示这 15 个分量。

答 $C_{1111}=E\dfrac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$

$$C_{1122}=E\frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}=\lambda$$

$$C_{1212}=E\frac{1}{2(1+\sigma)}=\mu$$

3.6.6 应变张量 $\partial u_i/\partial x_k$ 在 3.4 节的意义下是可约的。

在 3.6 节开头所进行的反对称部分 ξ_{ik} 的分离是简约的中途。完成简约的话，可写成

$$\begin{pmatrix}\eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13}\\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23}\\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta/3 & 0 & 0\\ 0 & \eta/3 & 0\\ 0 & 0 & \eta/3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\eta_{11}-\eta/3 & \eta_{12} & \eta_{13}\\ \eta_{21} & \eta_{22}-\eta/3 & \eta_{23}\\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33}-\eta/3\end{pmatrix}$$

其中 η 为缩并后的（标量的）u_{ii}。

(a) 证明张量 $v_{ij}=(1/3)\eta\delta_{ij}$ 所描述的只是体积的变化，但形状不变。

(b) 第 2 项的张量 $s_{ij}=\eta_{ij}-(1/3)\eta\delta_{ij}$ 所描述的是形状的变化（切变）到 1 次为止体积不变。

3.6.7 (a) 试推导弹性媒质的波遵从的方程

$$m\partial^2\boldsymbol{u}/\partial t^2=\left(k+\frac{4}{3}\mu\right)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}-\mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}$$

提示：全部考虑作用于立方体（质量为 m）的力。

(b) 如果位移是无旋的，证明弹性波以速度 $v=[(k+\frac{4}{3}\mu)/m]^{1/2}$ 传播，且为纵波（平面波或无穷远处的球面波）.

(c) 若位移是无源的，则弹性波以速度 $v=(\mu/m)^{1/2}$

传播，且为横波（平面波或无穷远处的球面波）。

3.7 麦克斯韦方程的洛仑兹协变性

我们已经知道有关狭义相对论的空间，时间的洛仑兹变换和特殊4维空间的旋转相同[1]。这个空间是闵可夫斯基空间，第4个坐标采用 $x_4=ict$。本来在定义里包含虚单位 i 的理由是为了使4维勾股弦定理和通常的3维直角坐标的情形有相同的形式——可认为是直角坐标系的判断条件——的空间。马上产生的课题就是要把麦克斯韦方程改写成闵可夫斯基空间的张量形式。如果这个改写真的成功，由张量的变换性质的要求，自然会导致麦克斯韦方程和狭义相对论没有矛盾的事实。已知下列关系式。

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\tag{3.102a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\rho\boldsymbol{v},\tag{3.102b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,\tag{3.102c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.\tag{3.102d}$$

还有

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}\tag{3.103}$$

符号分别具有绪论已讲过的通常的意义。为简单起见假定在真空（$\varepsilon=\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$）中。

利用标量势，和磁矢量势可写出

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\tag{3.104}$$

---

[1] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Cambridge, Mbss. Addison-Wesley (1951) Clhapter6. 从不依赖于坐标的光子张量方程 $\Sigma x_\lambda^2=0$ 可推导出洛仑兹变换。

式（3.104）已指定 $\boldsymbol{A}$ 的旋度但未定义 $\boldsymbol{A}$ 的散度（参考1.13节，1.15节）．为以后的方便，对矢量势 $\boldsymbol{A}$ 要加上限制条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad (3.105)$$

此乃洛仑兹条件．这个关系，以后对于分离有关 φ 和 $\boldsymbol{A}$ 的微分方程有用．这里势 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 并未完全确定．剩下的自由度是习题3.7.3的主题。

先用势 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 改写麦克斯韦方程．从（3.102c）和（3.104），可得

$$\nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3.106)$$

另一方面从（3.102b）和（3.104）及第1章的（1.80）$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V}) \nabla\nabla = \cdot \boldsymbol{V} - \nabla \cdot \nabla \boldsymbol{V} (= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) - \nabla^2 \boldsymbol{V})$，有

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} (\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 \boldsymbol{A}) = \frac{\rho \boldsymbol{v}}{\varepsilon_0} \qquad (3.107)$$

利用洛仑兹关系（3.105）和 $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$，有

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \boldsymbol{A} = -\mu_0 \rho \boldsymbol{v}$$

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3.108)$$

微分算符

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

在闵可夫斯基空间里为

$$\sum_{\lambda=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2}$$

其中按相对论里的惯例采用希腊字母的角标表示从 1 到 4 求和

$$\sum_{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2}$$

为 4 维的拉普拉斯，通常也叫达朗贝尔算符用符号 $\Box^2$ 表示之。容易证明它是标量（参考习题 3.2.3）。

为方便起见，定义

$$A_1 \equiv \frac{A_x}{\mu_0 c} = c\varepsilon_0 A_x, \qquad A_3 \equiv \frac{A_z}{\mu_0 c} = c\varepsilon_0 A_z,$$

$$A_2 \equiv \frac{A_y}{\mu_0 c} = c\varepsilon_0 A_y, \qquad A_4 \equiv i\varepsilon_0 \varphi \tag{3.109}$$

进一步假设

$$\frac{\rho v_x}{c} \equiv i_1 \quad \frac{\rho v_y}{c} \equiv i_2, \quad \frac{\rho v_z}{c} \equiv i_3, \quad i\rho \equiv i_4 \tag{3.110}$$

则（3.108）可写成

$$\sum_{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2}A_\mu = -i_\mu \tag{3.111}$$

的形式。

（3.111）看起来象张量方程，然而也只能说“象”还不是证明．要证明实际上它是张量方程还得先从研究普遍电流 i_μ 的变换性开始。

因电荷元de是不变量，所以

$$de = \rho dx_1 dx_2 dx_3 \tag{3.112}$$

是不变的．我们在 3.4 节已看到 4 维体积元 $dx_1dx_2dx_3dx_4$ 仍是不变的．我们比较（3.53）和（3.112）可以看出电荷密度 ρ 必须和 4 维矢量 dx_λ 的第 4 分量 dx_4 进行相同的变换．我们让 $i\rho = i_4$。于是肯定了 i_4 是某矢量的第 4 分量。

（3.110）的其它部分可展开为

$$i_1=\frac{\rho v_x}{c}=\frac{\rho}{c}\frac{dx_1}{dt}=\frac{i\rho}{ic}\frac{dx_1}{dt}=i_4\frac{dx_1}{dx_4} \quad (3.113)$$

这表明 i_4 可与 dx_4 进行相同的变换，即上式意味着 i_1 可与 dx_1 进行相同的变换。对 i_2 和 i_3 可得相同的结果，于是 i_λ 如同 dx_λ 的变换，总之说明 i_λ 是闵可夫斯基空间的4维矢量。假定由麦克斯韦方程（3.102）直接得到的（3.111）对所有的直角坐标系（所有的洛仑兹基准系）都是成立的。于是根据3.3节商的规则 A_μ 也是矢量，（3.111）为正确的张量方程。

我们回过头来，（3.104）可写成

$$i\varepsilon_0 E_j=\frac{\partial A_j}{\partial x_4}-\frac{\partial A_4}{\partial x_j},\quad j=1,2,3,$$

$$\frac{1}{\mu_0 c}B_i=\frac{\partial A_k}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_k},\quad (i,j,k)=(1,2,3) \quad (3.114)$$

这里定义新的张量

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}\equiv f_{\mu\lambda}=-f_{\lambda\mu}$$

因 A_λ 为矢量，所以这是2阶反对称张量。具体地写成

$$f_{\mu\lambda}=\varepsilon_0\begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

利用这个张量可把麦克斯韦方程当中的两个（3.102b）和（3.102c）合并为一个张量方程，可写成

$$\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\mu}=i_\lambda \quad (3.116)$$

（3.116）的左边是张量的4维散度，所以是矢量。这当然

和 3 阶张量 $\partial f_{\lambda\mu}/\partial x_\nu$ 的缩并是一样的（参考习题3.2.1，3.2.2）麦克斯韦方程剩下的两个（3.102 a）和（3.102d）也可以用张量形式表示，即用

$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{12}}{\partial x_3}=0 \tag{3.117}$$

代替（3.102 a），而用形如

$$\frac{\partial f_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{42}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{23}}{\partial x_4}=0 \tag{3.118}$$

的三个方程（第二个方程是将下标按 1，2，4 的次序换入，第三方程是将下标按 1，3，4 的次序换入）

$$\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}\equiv t_{\lambda\mu\nu}$$

为（3 阶的）张量，所以（3.102a）和（3.102 d）由张量方程

$$t_{\lambda\mu\nu}+t_{\nu\lambda\mu}+t_{\mu\nu\lambda}=0 \tag{3.119}$$

确定。从（3.117）和（3.118）可看出角标 λ，μ，ν 都不一样。实际上任何两个角标一致时（3.119）会自动地成为 $0=0$。

张量方程（3.116）和（3.119）的建立实际上就完成了麦克斯韦方程的洛仑兹协变性的证明。弄清楚（3.115）的 $f_{\mu\lambda}$ 的张量性质是很有意思的。对应于沿 z（x_3）轴以速度 v 的运动的洛仑兹变换"方向余弦"●为

$$a_{\lambda\mu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\gamma&i\beta\gamma\\0&0&-i\beta\gamma&\gamma\end{pmatrix} \tag{3.120}$$

● 洛仑兹变换的群论的引出，出现于4.12节，也可参考 Goldstein，6 章。

但

$$\beta=\frac{v}{c}$$

$$\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2} \qquad (3.121)$$

利用张量的变换性质，我们可以利用原来基准系的数值来表示运动系里的电场和磁场。从(3.13)，(3.115)，(3.120)，可得

$$E'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_x-vB_y),$$

$$E'_y=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_y+vB_x), \qquad (3.122)$$

$$E'_z=E_z,$$

$$B'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(B_x+\frac{v}{c^2}E_y),$$

$$B'_y=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(B_y-\frac{v}{c^2}E_x), \qquad (3.123)$$

$$B'_z=B_z$$

这种 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的结合是意料之中的，比如在不带撇的系里无电场的情形，考虑

$$E_x=E_y=E_z=0$$

对静止的带电粒子显然没有力的作用，粒子以速度 v 沿 z 轴运动●时，粒子上的观察者看来由

$$E'_x=-vB_y,$$

$$E'_y=vB_x$$

所确定（对和观察者固结在一起的带电粒子有力的作用）的场．但 $\boldsymbol{B}$ 为不带撇系的磁感应强度。这些方程可写成矢量形式

● 若速度(v^2/c^2 可忽略的程度）不是很小，则需要力的相对论变换。

$$E' = v \times B$$

或
$$F = qv \times B \tag{3.124}$$

这个式子可解释为普通磁感应强度 B 的操作定义。

最后由张量（或矢量）的性质我们能构成许多不变量。其中最重要的是两个 4 维矢量即矢量 A_λ 和 i_λ 的标量积。可写成

$$A_\lambda i_\lambda = c\varepsilon_0 A_x \frac{\rho v_x}{c} + c\varepsilon_0 A_y \frac{\rho v_y}{c}$$

$$+ c\varepsilon_0 A_z \frac{\rho v_z}{c} + i\varepsilon_0 \varphi i\rho$$

$$= \varepsilon_0 (A \cdot J - \rho\varphi), \text{ 不变量} \tag{3.125}$$

A为普通的磁矢量势，J为通常的电流密度。最后一项的 $\rho\varphi$ 是通常的静电的结合，它具有单位体积内的能量的量纲．由此可知新作出的不变量乃是对单位体积来讲的能量密度。场和电流的动态相互作用由 $A \cdot J$ 确定。

其它可能的电磁不变量出现于习题3.7.8，3.7.10。

习　题

3.7.1 证明

$$\sum_\mu \frac{\partial i_\mu}{\partial x} = 0$$

就是电荷和电流的连续性的主张（参考1.7节）．即使知道这个式子对所有的洛仑兹基准系都成立，为何不能由此得到结论说 i_μ 是矢量。

3.7.2 试将洛仑兹条件（3.105）写成闵可夫斯基空间的张量方程。

3.7.3 规范变换是标量势 φ_1，矢量势 A_1 按下列关系

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_1 - \nabla \chi$$

的变换．新出现的函数，要求 χ 满足齐次波动方程。证明下列结果。

(a) 洛仑兹条件不变

(b) 新的势和原来的势满足相同的非齐次波动方程。

(c) 电磁场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不变。

把在这个变换下电磁理论的不变性叫做规范不变性。

3.7.4 电荷为 q，质量为 m 的带电粒子遵从洛仑兹协变方程

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = (q/\varepsilon_0 m_0 c) f_{\mu\nu} p$$

p 为 4 维动量矢量$(p_1, p_2, p_3, iE/c)$，τ 为固有时，$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 为洛仑兹标量，证明在普通的空间时间形式下

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{dt} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}$$

3.7.5 从洛仑兹变换矩阵（3.120）推导出爱因斯坦速度合成定理

$$u' = \frac{u - v}{1 - (uv/c^2)} \quad 或 \quad u = \frac{u' + v}{1 + (u'v/c^2)}$$

但 $u = ic\mathrm{d}x_3/\mathrm{d}x_4$，$u' = ic\mathrm{d}x_3'/\mathrm{d}x_4'$

3.7.6 4 维二阶张量 $\mathbf{B}$ 的对偶张量 $\mathbf{B}^*$，其元素定义为

$$B^*_{ij} = \frac{1}{2!}\varepsilon_{ijkl} B_{kl}$$

证明 $\mathbf{B}^*$ 可按

(a) 旋转时作为 2 阶张量

(b) 反演时作为赝张量

进行变换。

注意：这个星号并不代表复数共轭。

3.7.7 f 为(3.115)所规定的电磁张量，作出 f 的对偶张量 f*

答 $$\mathrm{f}^* = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & cB_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & cB_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & cB_z \\ -cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{pmatrix}$$

这相当于

$$c\mathbf{B} \to -i\mathbf{E},$$

$$-i\mathbf{E} \to c\mathbf{B}$$

的变换。这个变换叫做对偶变换，真空中（$\rho = 0$）的麦克斯韦方程在这个变换下是不变的。

3.7.8 四阶赝张量和两个 2 阶张量的 4 重缩并很明显是赝标量。试计算之。

答 $-8i\varepsilon_0^2 c\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}$

3.7.9 (a)电磁场在某特定洛仑兹基准系里只是电场(或只是磁场)时，证明 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在其它洛仑兹系里是正交的。

(b) 相反，若 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在某特定洛仑兹系里是正交的话，存在着 $\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{B}$）消失的洛仑兹基准系，试确定这个基准系。

3.7.10 证明 $c^2B^2 - E^2$ 为不变量。

3.7.11 $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_4)$为矢量，所以 $\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\mu$为标量。就运动粒子在下面两个不同的坐标系里计算这个标量：(a) 对观察者固定的坐标系(实验室系)。(b)和运动粒子(从观察者看有速度 $\mathbf{v}$)一起运动的坐标系。粒子系的微小时间变化为$\mathrm{d}\tau$，它在实验室系为 $\mathrm{d}t$ 时，证明

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}$$

$\mathrm{d}\tau$ 即 τ 为粒子的固有时是洛仑兹不变量。

参考文献

Heitler, W.,*Quantum Theory of Radiation* 2nd Ed.,Oxford University Press (1947).

Jeffrreys, Harold, *Cartesian Tensors,* Cambridge: Cambridge University press (1952).

这是有关直角坐标张量和向经典物理学的广泛领域的直角坐标张量应用的好书.

Lawden, Derek F., *An Introduction to Tensor Calculus and Relativity*. New York: Wiley (Methuen monograph)(1962).

Mϕller, C., *The Theory of Relativity,* Oxford: Oxford University Press(1955)

广义相对论讲义包括了张量分析的讨论. 4 章描述了张量计算，也有对偶张量的话题，向非直角坐标系的推广——在广义相对论是必要的——在第9章加以讨论.

Panofsky, W, K. H., and M.Philips, *Classical Electricity and Magnetism*. Reading, Mass: Addison-Wesley (1955) .

麦克斯韦方程的洛仑兹协变性在真空中，在物质中都讨论了. 在这本书里用了比闵可夫斯基空间更普遍的逆变、协变张量. 利用闵可夫斯基空间的讨论可参考 Heitler 及 Stratton 的书. Sokolnikoff, I.S., *Tensor Analysis—Theory and Applications*. New York: Wiley (1951).

对于张量分析向非欧几何的推广特别有用. Spain, B., *Tensor Calculus,* 3nd. Ed New York: Interscience Publishers. (1960).包括对弹性和相对论的应用在内有用，且简洁的张量的说明.

Stratton, J,A., *Electromagnetic Theory* New York: McGralw-Hill(1941).

Temple, George, *Cartesian Tensors,* New York: Wiley (Methuen mono-graph) (1960).

第4章　行列式，矩阵，群论

4.1　行列式

首先简单地讨论一下行列式的若干性质，再来学习矩阵。行列式有助于分析矩阵，相反，矩阵对于阐明它和行列式的不同性质颇为有用。

性　质　行列式是数或函数的正方排列，这些数或函数按以下规则结合起来。

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

这个排列的列数叫做行列式的次数。行列式D的值用它的元a_i、b_i等来表示的话，有

$$D=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk\cdots\cdots}a_ib_jc_k\cdots\cdots, \tag{4.2}$$

但$\varepsilon_{ijk\cdots\cdots}$是3.4节的列维-契维塔符号的类推，对（1，2，3，$\cdots n$）的偶置换取$+1$，对奇置换取-1，有相同下标出现时为零。

对三次行列式来讲，有

$$D=+a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1 \tag{4.3}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (4.4)$$

可以看出三次行列式是乘积的线性组合，各乘积只含有各行各列的一个元。各乘积中的各元如果是行的偶置换则为正，如果是奇置换则为负.（列保持 a，b，c 即 1，2，3 的次序）也就是（4.3）、（4.4）的简写。

从（4.2）可得到行列式的若干有用性质，利用三次行列式（4.3）是便于说明的。

利用子行列式的拉普拉斯展开（4.3）可改写如下：

$$D=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (4.5)$$

一般 n 次行列式可以展开成某行（或列）的元和去掉该元所在的行与列后作出的（$n-1$）次行列式的乘积的线性组合。这个缩小后的排列（这个例子是2×2）叫做子行列式。假设该元处于第 i 行和第 j 列时，则乘积冠以符号（$(-1)^{i+j}$，带有这个符号（$(-1)^{i+j}$的子行列式叫做代数余子式。从行列式 D 去掉 i 行 j 列作成的子行列式为M_{ij}，和它相对应的代数余子式写成C_{ij}，则（4.5）式变成

$$D=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}a_iM_{i1}=\sum_{i=1}^{3}a_iC_{i1}$$

这个例子是就第 1 列进行展开，因此 $j=1$ 对 i 求和。

利用这个拉普拉斯展开的好处是，当高次行列式有许多元素为 0 时，计算起来很方便，例如，求行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \tag{4.6}$$

沿第1行展开时，有

$$D=(-1)^{1+2}(1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \tag{4.7}$$

再就第1行进行展开，得

$$D=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1 \tag{4.8}$$

行列式D(4.6)从出现于狄拉克相对论电子论的狄拉克之一得来。

反对称性　当行列式任意两行交换或两列交换时，改变符号。这是由于(4.2)的列维-契维塔符号ε的偶奇性而来，就三维情形而言，由(4.3)，(4.4)可以弄清楚这一点。这个性质在3.4节用来作出就整体来讲是反对称的线性组合。另外在量子力学里组成多粒子波函数时经常使用。波函数遵从泡里不相容原理，对于任意两个有相同自旋1/2的粒子（电子、质子、中子等）的交换是反对称的。

反对称的特殊情形是任意两行或两列相等时行列式为零。如果某行或某列的元素皆为零，则行列式为零。某行或某列的各元素乘以常数时，则行列式成为常数倍。将某行或某列的常数倍加到其它行或列，行列式的值不变。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{4.9}$$

右边利用拉普拉斯展开时

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (4.10)$$

根据反对称性质，右边第二项的行列式为零，因而（4.9）式成立。

一个特殊情形，当任意两行或两列成正比时，行列式等于零。

联立齐次方程式的解　行列式的主要应用之一是确定一次联立方程的零以外的解的存在条件。考虑含有三个未知数的三个齐次方程（或含有 n 个未知数的 n 个方程）

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

除 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 的解以外，如何确定解是否存在。作出（4.11）的系数行列式并乘以 x

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(4.12)

最后等式是根据（4.9）得到的。这个行列式的第1列，根据（4.11）各元素应该为零，故有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.13)$$

因此，只要系数行列式不为零，x（以及 y,z）必须为零。相反，如果系数行列式为零，那就意味着存在非零解。

联立非齐次方程的解　一次代数方程是非齐次时，也就

是用d_1, d_2, d_3分别代替(4.11)的右边的零时，则由(4.12)有

$$x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{4.14}$$

对于数值计算来讲，这个行列式的解（4.14）是很麻烦的。行列式含有符号相互不同的很大数值时，两个大数的相减会使相对误差激增，计算结果变得没有什么意义。也许会有人想，这里是用行列式解三个未知数的三个方程，如果解20个未知数的20个方程说不定会容易。但根据行列式的定义（4.2），n次行列式有$n!$个项。对于计算1项需花1微秒的高速电子计算机来讲，计算这些$n!$项，计算机要计算$20!$微秒，即用77000年。很明显这是不可取的方法。

事实上有一些好的办法。最好的方法之一是直接消去法，通常叫做高斯消去法，为了说明这一方法考虑下列方程组。

例题4.1.4用高斯消去法解

$$\begin{aligned} 3x+2y+z&=11 \\ 2x+3y+z&=13 \\ x+y+4z&=12 \end{aligned} \tag{4.15}$$

为方便起见，并能得到最好的数值精确度，重新整理方程，使最大的系数沿对角线排列，上面的方程组已符合这一要求。第1个方程开始的未知数x用来消去剩下方程的x，用第2个方程从最后一个方程消去y，一般对方程组从上到下用这个办法进行，用最后的式子确定一个未知数，现在从下往上按次序来确定未知数。

$$\begin{aligned} x+0.6667\,y+0.3333z&=3.6667 \\ x+1.5000\,y+0.5000\,z&=6.5000 \\ x+1.0000\,y+4.0000\,z&=12.0000. \end{aligned} \tag{4.16}$$

在这里利用第1式从第2、第3式消去x

$$x+0.6667y+0.3333z=3.6667$$
$$0.8333y+0.1667z=2.8333 \quad (4.17)$$
$$0.333y+3.6667z=8.3333$$
$$x+0.6667y+0.3333z=3.6667$$
$$y+0.2000z=3.4000 \quad (4.18)$$
$$y+11.0000z=25.0000.$$

重复进行这一方法，利用新的第 2 式，从第 3 式消去 y

$$x+0.6667y+0.3333z=3.6667$$
$$y+0.2000z=3.4000$$
$$10.8000z=21.6000 \quad (4.19)$$
$$z=2.0000$$

其次，从下向上

$$y+0.2000\times 2.0000=3.400.$$
$$y=3.0000.$$

利用已知的 y 和 z

$$x+0.6667\times 3.0000+0.3333\times 2.0000=3.6667,$$
$$x=1.0000.$$

这个方法看起来也许不如（4.14）那样简明，但很适应现代计算机，大大缩短了解行列式的时间。

如众所周知，高斯-约当消去法是这种逐步消去法的一个变形。仍从高斯消去法出发，但各新方程不只是用来从它后一方程，而是从所有方程消去一个变数。在上一例里，若利用高斯-约当消去法时，则（4.19）成为

$$x+0.2000z=1.4000$$
$$y+0.2000z=3.4000 \quad (4.20)$$
$$z=2.0000$$

(4.18)的第 2 式用来从第 1 和第 3 式消去 y。其次(4.20)的第 3 式用来从第 1 及第 2 式消去 z，

$$x = 1.0000$$
$$y = 3.0000 \quad (4.21)$$
$$z = 2.0000$$

在4.2节为了作出逆矩阵，又回到高斯-约当方法。

适合于计算机的另一方法是高斯-札衣德的重复法，包括这个方法在内，在下面举出的书里详细地讨论了高斯法，高斯-约当法。

数字计算机的数学方法（A.Ralston, and H.S, Wilf, eds）New York; Wiley（1967）

习　题

4.1.1 试计算下列行列式

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

4.1.2 试分析下列一次联立方程是否具有非零解

$$x+3y+3z=0,$$
$$x-y+z=0,$$
$$2x+y+3z=0.$$

4.1.3 用 2×2 的行列式来表示 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的分量，再就标量积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$给出$3\times3$的行列式的拉普拉斯展开。最后因$3\times3$行列式有两列相等，所以能够肯定 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$。

4.1.4 设 C_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式（去掉 i 行 j 列，冠以 $(-1)^{i+j}$而成），证明下列结果：

(a) $\sum_i a_{ij}C_{ij}=\sum_i a_{ji}C_{ji}=|A|$，其中 $|A|$ 为具有元素 a_{ij} 的行列式

(b) $\sum_i a_{ij}C_{ik}=\sum_i a_{ji}C_{ki}=0$，$i\neq k$.

4.2 矩 阵

基本定义：矩阵是数或函数按正方形或长方形进行排列，并遵守若干法则。这不过是一般的数学概念的简单的罗辑推广。算术只和单独的数打交道，在复数理论里要处理带有顺序的一组数 $(1,2)=1+2i$。在这种情况下，数的排列次序甚为重要。现在考虑的是排列成正方形或长方形的数（或函数）。为便于以后的讨论，这些数用两个下标来加以区别，第 1 个下标表示该元素出现的行（水平），第 2 个下标表示它出现的列（垂直）。比如 a_{13} 是第 1 行第 3 列的元素，假设 A 为 m 行 n 列的矩阵时

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

需要注意，元素 a_{ij} 和其它元素没有任何联系是最重要的。矩阵和行列式不同，并不是单 的数，而是有次序的数的排列。所有元素互相加起来或相乘是没有意义的。和写成 $1+2i=3!$ 同样毫无意义。

矩阵 A 是某些数的排列的这种性质，意味着它实际上成为新形式的数学。矩阵 A，B，C 各有元素 a_{ij}，b_{ij}，c_{ij}，按以下规则组成。

等　式　对所有的 i，j 值 $a_{ij}=b_{ij}$ 时，只有如此才有 $A=B$。当然 A 和 B 都采取 $m\times n$ 的排列。

和　对所有 i，j 值 $a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$ 时，即元素按代数学方法组成（如果是单纯的数按算术方法）时，即 $A+B=C$。从此可得交换律 $A+B=B+A$。并满足结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$。

乘　积　（数与矩阵）矩阵乘以数 α 时，定义

$$\alpha A=(\alpha A)$$

αA 的元素为 αa_{ij}，即矩阵的各元素乘以数因子。和行列式对比起来，行列式是因子 α 只和一行或一列相乘，并不和行列式的所有元素相乘。这些数相乘结果满足交换律。

乘　积　（矩阵的积）

$$c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj} \tag{4.23}$$

时，

$$AB=C$$

C 的 ij 元素用 A 的 i 行 B 的 j 列组成（要求 A 的列数 n 等于 B 的行数）下标 k 按 1，2，3……，n 的次序取。对于 $n=3$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j} \tag{4.24}$$

很明显，将(4.23) 中的 k 换成其它符号仍是一样。用(4.23)定义若干矩阵的结合方法，也许更有助于理解。这种结合方

法叫做矩阵的乘积，考虑两个矩阵

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\tag{4.25}$$

乘积的11元素 $(\sigma_1\sigma_3)_{11}$ 是由 σ_1 的第1行和 σ_3 的第1列彼此对应元素乘积的和来确定。

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\to 0\cdot1+1\cdot0=0.$$

继续做下去有

$$\sigma_1\sigma_3=\begin{pmatrix}0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot(-1)\\1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\tag{4.26}$$

$$(\sigma_1\sigma_3)_{ij}=\sigma_{1_{i1}}\sigma_{3_{1j}}+\sigma_{1_{i2}}\sigma_{3_{2j}}$$

直接利用矩阵乘积的定义

$$\sigma_3\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\tag{4.27}$$

把这一结果和（4.26）对比，有

$$\sigma_3\sigma_1=-\sigma_1\sigma_3\tag{4.28}$$

特别情况除外，矩阵的乘积是不可对易的①

$$AB\neq BA.\tag{4.29}$$

但从矩阵乘积定义可知结合律是适合的 $(AB)C=A(BC)$。而且分配律也是适合的。

直　积　矩阵的第2种乘法是直积或张量积，做法如下，假设 A 为 $(m\times m)$ 矩阵，B 为 $(n\times n)$ 矩阵，其直积写成

$$A\otimes B=C\tag{4.30}$$

时，则 C 为 $(mn\times mn)$ 矩阵，其元素为

---

① $[A,B]=AB-BA\neq0$

$$C_{ik,jl}=A_{ij}B_{kl}. \tag{4.31}$$

比如，A 和 B 都是 2×2 矩阵时

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

直积虽满足结合律，但不可对易，作为直积的例子，如4.5节的狄拉克矩阵可展开成泡利矩阵和单位矩阵的直积。其它例子有，比如在群论里组成群时，在量子力学的矢量空间即希尔柏特空间中都会出现。

特殊情形　若干矩阵特别有趣。由1列和 n 行组成的矩阵叫做列矢量$\{x\}$，其分量为 $x_i, i=1,2,\cdots\cdots,n$。同样，1行 n 列的矩阵叫做行矢量$[x]$，有分量 x_i，$i=1,2,\cdots\cdots,n$。A为 $n\times n$ 矩阵，若$\{x\}$为有 n 个分量的列矢量，$[x]$是有 n 个分量的行矢量时

$$A\{x\},\quad [x]A$$

可由（4.23）来定义，但

$$A[x],\quad \{x\}A$$

就没有定义。

单位矩阵 I 具有元素 δ_{ij} 即 *Kronecker* 的 *delta* 所有的 A 有 $IA=AI=A$ 的性质

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

所有元素皆为零的矩阵，叫做零矩阵，用 O 表示，对所有的矩阵 A 都有

$$OA = AO = O,$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

须注意两个矩阵都不是零，但它们的积可能是零。若

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

时，有 $AB = 0$，这当然和普通代数是不同的。

对角矩阵 矩阵中特别重要的是，所有非对角元素皆为零的正方矩阵，尤其是 3×3 矩阵 A 为对角矩阵时

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

这种对角矩阵的物理意义，以及矩阵的对角化方法在4.6节讨论。这里只侧重于对角矩阵的明显性质。即对角矩阵的乘积是可对易的，若 A 和 B 都是对角矩阵时，则有

$$AB = BA$$

矩阵的迹 任意正方矩阵对角元素的和称为矩阵的迹。一个有趣且有用的性质是，两个矩阵 A 和 B 的乘积的矩阵的迹与乘积次序无关

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}(AB) &= \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \sum_j (BA)_{jj} \\ &= \operatorname{trace}(BA) \end{aligned} \tag{4.35}$$

上式即使 $AB \neq BA$ 仍成立。

矩阵代表群的元素受到广泛应用（参考习题 4.2.7 和 7～4.12节）。在群论里把作为群的元的矩阵的迹称为指标。这种特别命名以引起人们注意的理由是，即使矩阵发生变化，但矩阵的迹即指标却保持不变。

矩阵的逆运算　若矩阵 A 已知时，问题是怎样找它的逆矩阵 A^{-1}

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{4.36}$$

根据习题 4.2.27 若 A 的行列式 $|A| \neq 0$ 时

$$a_{ij}^{-1} = \frac{C_{ji}}{|A|} \tag{4.37}$$

若行列式是零，则称 A 不是正则的，不存在逆矩阵。利用（4.37）就要求 $|A| \neq 0$。如 4.1 节末尾所述，这种行列式不适合于高维矩阵的数值计算。

代替上述的许多方法当中，最好而且用得很普遍的一个是高斯-约当的矩阵反转法。在理论上它是以习题 4.2.28 及 4.2.29 为基础。存在某矩阵 M_L 取乘积 M_LA 时，则 A 为

(a) 一行变成原行的常数倍，或者；

(b) 一行可以用原行减去另一行的常数倍来替换，或者；

(c) 换行

用另一矩阵 M_R 从右方相乘得 AM_R，对 A 的列来讲和以上有相同的作用

这和处理行列式相同（取矩阵的乘积）意味着要和行和列打交道，因此，4.1节的高斯-约当的消去法也适用于矩阵元素。即存在某矩阵 M_L（或 M_R）[1]

$$M_LA = I \tag{4.38}$$

---

[1] 切记 $\det(A) \neq 0$。

于是 $M_L = A^{-1}$。M_L可用相同消去算符作用于单位矩阵来获得

$$MI = M_L \tag{4.39}$$

要弄清楚这一点，还需要一些例子。

例题 4.2.1 高斯-约当的矩阵反转法

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

我们要寻求 A 的逆矩阵。为方便起见把 A 与 I 一起写出，进行相同的运算.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

使各行分别增加常数倍，使得 $a_{k1} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.6667 & 0.3333 \\ 1 & 1.5000 & 0.5000 \\ 1 & 1.0000 & 4.0000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

从第 2，第 3 行减去第 1 行

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.6667 & 0.3333 \\ 0 & 0.8333 & 0.1667 \\ 0 & 0.3333 & 3.6667 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.3333 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0.5000 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

其次用0.8333去除第 2 行（就双方的矩阵），再从第 1 行减去它的0.6667倍，从第 3 行减去它的0.3333倍时

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.2000 \\ 0 & 1 & 0.2000 \\ 0 & 0 & 3.6000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.6000 & -0.4000 & 0 \\ -0.4000 & 0.6000 & 0 \\ -0.2000 & -0.2000 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

用 3.6 去除第 3 行，作为最后阶段取 第 3 行 的 0.2 倍，分别从上面两行减去它，得到的矩阵对为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.6111 & -0.3889 & -0.0556 \\ -0.3889 & 0.6111 & -0.0556 \\ -0.0556 & -0.0556 & 0.2778 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

验算是用原来的 A 乘上计算出来的 A^{-1}，看看实 际 上是否能得到单位矩阵 I。结果求到小数点四位，得

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0.9999 & -0.0001 & -0.0002 \\ -0.0001 & 0.9999 & -0.0002 \\ -0.0002 & -0.0002 & 1.0000 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

右边在取舍误差（-0.5555当作-0.5556）范围内成为单位矩阵。

和一次联立代数方程的高斯-约当的 解 法相同，这个方法很适合于大型计算机。事实上，高斯-约 当 的矩阵反转法作为子程序（*subroutine*）在 程 序 库（*program library*）也许可以使用。

习　　题

4.2.1 试证明矩阵的乘积满足结合律。

4.2.2 A 和 B 可对易时，试证明

$$[A, B] = 0$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

4.2.3 下式成立时，试证明矩阵 A 是线性算符

$$A(c_1\boldsymbol{r}_1 + c_2\boldsymbol{r}_2) = c_1A\boldsymbol{r}_1 + c_2A\boldsymbol{r}_2.$$

显然 $n\times n$矩阵是 n 维矢量空间的最普遍 的 算符。这意味着任何算符在 n 维空间里和矩阵相同。

4.2.4 (a) 复数 $a+ib$ 可用 2×2 矩阵来表示（即同构）。

$$a+ib\leftrightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

证明这个矩阵表示对 (i) 求和和 (ii) 乘积都是对的。

(b) 试求出对应于 $(a+ib)^{-1}$的矩阵。

4.2.5 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵时，试证明

$$\det(-A)=(-1)^n\det A$$

4.2.6 矩阵 C 是 A 和 B 的乘积，试证明 C 的行列式等于 A 和 B 的行列式的乘积

$$\det C=\det A\times\det B.$$

4.2.7 三个矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

试作出两两相乘的所有可能组合，并包含自乘，试用 ABC 及 I 表示其结果。这三个矩阵和单位矩阵作成四元群，在4.7及4.8节反复参考这个群。

4.2.8

$$K=\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

时若 $n\neq 0$，试证明 $K^n=KKK\cdots\cdots(n\ \text{因子})=I$

4.2.9 证明雅可比恒等式

$$[A[B,C]]=[B,[A,C]]-[C,[A,B]].$$

这对基本粒子的矩阵表示很方便，须注意雅可比恒等式和1.5节的 ABC-CAB律$[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}]$在形式上相同。

4.2.10 证明矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

满足下列对易关系

$[A,B]=C$, $[A,C]=0$ $[B,C]=0$。

这些矩阵用于通过李代数去研究厄米特多项式[●]。

4.2.11 就3个矩阵

$$i=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},j=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},k=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

证明下列各问

(a) $i^2=j^2=k^2=-I$ 但 I 为单位矩阵。

(b) $ij=-ji=k$,

$jk=-kj=i$,

$ki=-ik=j$。

这三个矩阵加上单位矩阵，成为四元数的元。代替它的元可由四个 2×2 矩阵 $i\sigma_1$, $i\sigma_2$, $-i\sigma_3$ 以及 I 作成，其中 σ 是泡里的自旋矩阵（习题4.2.12）。

4.2.12 三个泡里自旋矩阵由

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

确定。证明下列性质

(a) $\sigma_i^2=1$,

●Bruria Kaufman."Special Functions of Mathematical Physics from the Viewpoint of Lie Algebra,"J.Mathematical Phys 7.447 (1966).

(b) $\sigma_i\sigma_j = i\sigma_k$, $(i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)$,

(c) $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}I$. （循环置换）

这些矩阵泡里曾用于电子自旋的非相对论理论。

4.2.13 利用上个问题的泡里的 σ 证明下式

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{i}\sigma_x + \boldsymbol{j}\sigma_y + \boldsymbol{k}\sigma_z$

$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为通常的矢量。

4.2.14 自旋为 1 的粒子，可用下列矩阵来描述

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad M_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix},$$

$$M_z = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

证明下列性质

(a) $[M_x, M_y] = iM_z$[●]等。下标用循环置换的列维-契维塔符号（3.4）时，可写成如下形式

$$[M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k.$$

(b) $M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = 2I$，其中 I 为单位矩阵。

(c) $[M^2, M_i] = 0$,

$[M_z, L^+] = L^+$,

$[L^+, L^-] = 2M_z$

但 $L^+ \equiv M_x + iM_y$,

$L^- \equiv M_x - iM_y$.

4.2.15 利用另一表示

●$[A, B] = AB - BA$

$$M_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},M_y=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},$$

$$M_z=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

重解上问。在4.10节这个矩阵作为旋转矩阵的生成元出现。

4.2.16 对自旋 3/2 利用矩阵

$$M_x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}&0&0\\\sqrt{3}&0&2&0\\0&2&0&\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&0\end{pmatrix},$$

$$M_y=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&-\sqrt{3}&0&0\\\sqrt{3}&0&-2&0\\0&2&0&-\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&0\end{pmatrix},\quad M_z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

重解习题 4.2.14。

4.2.17 算符中和角动量算符的 x 及 y 分量 j_x 和 j_y 可以对易，证明 p 和角动量的第 3 分量可对易

$$[p,\ j_z]=0$$

提示：角动量分量必须满足习题 4.2.14(a)

4.2.18 习题 4.2.14 的 L^+ 和 L^- 矩阵叫做升降算符，L^+ 作用于自旋投影为 m 的系统时，只要 m 不是最大，L^+就使自旋投影提高到 $m+1$。作用于 m_{max} 时变成零。同理，L^- 使自旋投影下降 1。

$$L^+=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},L^-=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

用$\sqrt{2}$除习题4.2.14的结果．证明下列关系式

$L^+\{-1\}=\{0\}$，$L^-\{-1\}=$零列矢量

$L^+\{0\}=\{1\}$，$L^-\{0\}=\{-1\}$

$L^+\{1\}=$零列矢量，$L^-\{1\}=\{0\}$

其中$\{-1\}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\{0\}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\{1\}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

各代表自旋投影为-1，0，1的状态。

4.2.19 矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$用张量$\mathbf{T}$结合起来

$$\boldsymbol{B}=\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{A}$$

试证明即使给定$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{A}$，$\mathbf{T}$的分量也并不存在唯一的解。这也就是为什么不能定义矢量的商$\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$的理由．(例外情形是$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$平行时$\mathbf{T}$为标量，所以这不算在内。)

4.2.20 某矢量的逆可在下式意义下来确定

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}=1。$$

证明用这一关系唯一地定义$\boldsymbol{A}^{-1}$并不充分．$\boldsymbol{A}$具有无穷多个逆。

4.2.21 A为对角矩阵，若它的对角分量皆不相同。试证明B和A可对易时，B也是对角矩阵。

4.2.22 若A和B可对易时，证明A和B为对角矩阵。

4.2.23 若在3个矩阵A,B,C之中有两个可对易时，试证明

$$\mathrm{trace}(ABC)=\mathrm{trace}(CBA)$$

4.2.24 若$\{x\}$为N维列矢量，$[y]$为N维行矢量时，证明下式

$$\mathrm{trace}(\{x\}[y])=[y]\{x\}.$$

4.2.25 (a) 两个正则矩阵如果是反对易的，试证明各矩阵的迹为零(所谓正则是指矩阵元素的行列式不为零)。

(b) 作为 (a) 成立的条件，A 和 B 分别为 $n\times n$ 矩阵，n 为偶数。试证明 n 为奇数时会产生矛盾。

4.2.26 若矩阵有逆时，证明它的逆可唯一地确定。

4.2.27 A^{-1} 有元素

$$a_{ij}^{-1}=\frac{C_{ji}}{|A|}$$

时，但 C_{ji} 是 $|A|$ 的第 ji 个代数余子式

证明 $A^{-1}A=I$

其中 A^{-1} 为 A 的逆矩阵（但 $|A|\neq 0$）。

4.2.28 求具有下列性质的矩阵 M_L。乘积 M_LA 等于 A，但

(a) i 行变成 k 倍 ($a_{ij}\to ka_{ij}$, $j=1, 2, 3\cdots\cdots$)。

(b) i 行用"从原来的 i 行减去 m 行的 k 倍"来替换 ($a_{ij}\to a_{ij}-ka_{mj}$, $j=1, 2, 3\cdots\cdots$)。

(c) 交换 i 行与 m 行 ($a_{ij}\to a_{mj}$, $a_{mj}\to a_{ij}$, $i=1,2,3\cdots\cdots$)。

4.2.29 求出有下列性质的矩阵 M_R。乘积 AM_R 等于 A。

(a) 取 i 列的 k 倍 ($a_{ji}=ka_{ji}$, $j=1, 2, 3\cdots$)。

(b) i 列用"从开始的 i 列减去 m 列的 k 倍"来替换 ($a_{ji}\to a_{ji}-ka_{jm}$, $j=1, 2, 3\cdots$)。

(c) 交换 i 列与 m 列 ($a_{ji}\to a_{jm}$, $a_{jm}\to a_{ji}$, $j=1,2,3\cdots$)。

4.2.30 求下列矩阵的逆

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1\\3&2&1\\1&1&4\end{pmatrix}.$$

4.3 正交矩阵

通常的三维空间，可用常见的直角坐标 (x,y,z) 来描述，考虑第 2 组直角坐标 (x',y',z'). 让这一坐标原点和第

1 组坐标原点相一致，假设方向不同。在这一节里，从另一侧面和另一关系把第 1 章和第 3 章的要点，反复加以阐明。第1 章和第 3 章把注意力集中于矢量和张量。在这一章着重于阐述坐标的旋转。

方向余弦　沿 x' 轴（$\boldsymbol{i}'$）的基矢，用通常的投影方法可分解为 x，y及 z 轴方向的分量

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}\cos(x', x) + \boldsymbol{j}\cos(x', y) + \boldsymbol{k}\cos(x', z). \tag{4.47}$$

为方便起见把这些余弦（方向余弦）记为

$$\begin{aligned} \cos(x', x) &= a_{11}, \\ \cos(x', y) &= a_{12}, \\ \cos(x', z) &= a_{13} \end{aligned} \tag{4.48}$$

接着有

$$\begin{aligned} \cos(y', x) &= a_{21}\ (a_{21} \neq a_{12}) \\ \cos(y', y) &= a_{22}\text{等等。} \end{aligned} \tag{4.49}$$

于是（4.47）可写成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}' &= \boldsymbol{i}a_{11} + \boldsymbol{j}a_{12} + \boldsymbol{k}a_{13}, \\ \boldsymbol{j}' &= \boldsymbol{i}a_{21} + \boldsymbol{j}a_{22} + \boldsymbol{k}a_{23}, \\ \boldsymbol{k}' &= \boldsymbol{i}a_{31} + \boldsymbol{j}a_{32} + \boldsymbol{k}a_{33}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 也可以分解为带撇系的分量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= \boldsymbol{i}'a_{11} + \boldsymbol{j}'a_{21} + \boldsymbol{k}'a_{31}, \\ \boldsymbol{j} &= \boldsymbol{i}'a_{12} + \boldsymbol{j}'a_{22} + \boldsymbol{k}'a_{32}, \\ \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{i}'a_{13} + \boldsymbol{j}'a_{23} + \boldsymbol{k}'a_{33}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

使下标 1 对应于 $\boldsymbol{i}$ 及 $\boldsymbol{i}'$，2对应于 $\boldsymbol{j}$及 $\boldsymbol{j}'$，3 对应于 $\boldsymbol{k}$及$\boldsymbol{k}'$时，则 a_{ij} 开始的下标对应于带撇的基矢（$\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}'$），后面的下标对应于基矢（$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$）。

应用于矢量　考虑某矢量，假设其分量为空间坐标的函数

$$\boldsymbol{V}(x, y, z) = \boldsymbol{i}V_x + \boldsymbol{j}V_y + \boldsymbol{k}V_z$$

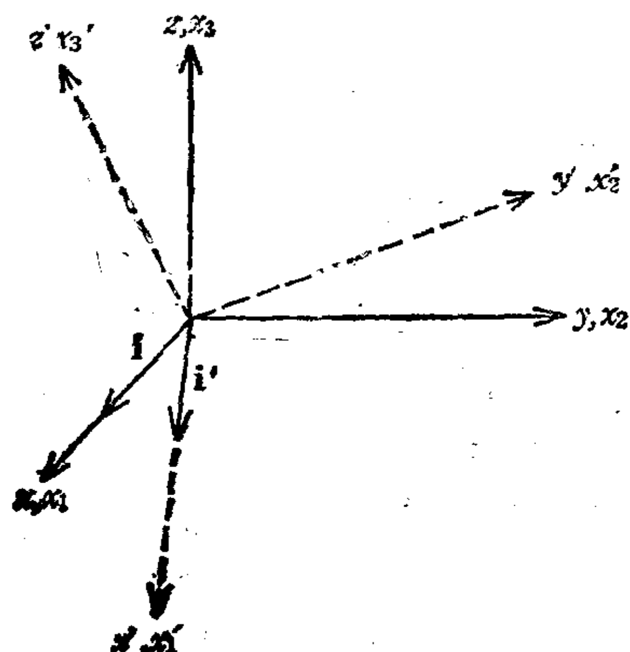


图 4.1 笛卡儿直角坐标

$$=\boldsymbol{V}'(x',y',z')=\boldsymbol{i}'V'_{x'}+\boldsymbol{j}'V'_{y'}+\boldsymbol{k}'V'_{z'} \quad (4.52)$$

矢量所代表的位置，由坐标 $(x,\ y,\ z)$ 及(x',y',z') 的双方来确定. 利用 (4.51) 消去$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$时，(4.52) 可分离为 3 个标量方程

$$\begin{aligned} V'_{x'} &= a_{11}V_x + a_{12}V_y + a_{13}V_z, \\ V'_{y'} &= a_{21}V_x + a_{22}V_y + a_{23}V_z, \\ V'_{z'} &= a_{31}V_x + a_{32}V_y + a_{33}V_z. \end{aligned} \quad (4.53)$$

尤其是，这个关系对于位置 $(x,\ y,\ z)$ 及 (x',y',z') 也是成立的，所以有

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \quad (4.54)$$

为方便起见，把描述方式稍微改变一下.

$$\begin{aligned} x &\to x_1, \\ y &\to x_2, \\ z &\to x_3. \end{aligned} \quad (4.55)$$

对带撇的坐标也一样。根据这种描述，3 个方程（4.54）可写成

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \tag{4.56}$$

i 取 1，2，3 所以结果是三个分立方程。

这些结果暂时放在这里，再用别的方法来分析这个问题，考虑两个坐标系（x_1，x_2，x_3）和（x_1'，x_2'，x_3'）。它们都取同一点为坐标原点。空间中某点在不带撇的系里用（x_1，x_2，x_3）表示。在带撇的系里用（x_1'，x_2'，x_3'）表示。须注意同一符号 x 既用表示坐标轴也表示沿该轴离开原点的距离。因我们的系统是线性的，所以 x_i' 必须是 x_1 等的线性组合

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \tag{4.57}$$

a_{ij} 和前面出现的方向余弦一样。以后就二维情形再来阐明它。两组量在不带撇系里用（V_1，V_2，V_3），在带撇系里用（V_1'，V_2'，V_3'）表示。如果它们所满足的关系和两个不同坐标系之间某点坐标所满足的关系（4.57）相同，则

$$V_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} V_j \tag{4.58}$$

和1.2节一样，量（V_1，V_2，V_3）定义为矢量的分量。即矢量是根据坐标系旋转变换性质来定义。某空间的坐标作为矢量的原形来处理。这种定义的实用性在第 3 章里已经明确，并推广到赝矢量和赝张量。

从（4.56）就 a_{ij} 可得到有趣的信息。a_{ij} 表示坐标系（x_1，x_2，x_3）对坐标系（x_1'，x_2'，x_3'）的相对方向。因在双方的系统里从原点到该空间点的距离相等。所以

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i x_i'^2$$

$$= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right)\left(\sum_k a_{ik} x_k\right)\text{●}$$

$$= \sum_{j,k} x_j x_k \sum_i a_{ij} a_{ik}. \qquad (4.59)$$

这只有当 $$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad j,k = 1,2,3 \qquad (4.60)$$

成立时，才对所有的点都对。必要的话，回到（4.59）假设 $\boldsymbol{r}=(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ $(1,1,0)$ 等，只要计算一下（4.60）左边 9 个关系式，就可以看出这个式子是对的。某给定的一组 a_{ij} 对所有的 $\boldsymbol{r}$（4.59）必须成立。因此，可以看出来，（4.60）乃坐标旋转时，要求长度不变的必然结果，也叫做正交条件。因 a_{ij} 可写成矩阵 $\boldsymbol{A}$ 故为正交矩阵。可是要充分注意（4.60）并不是矩阵的乘积。这个式子可解释为 $\boldsymbol{A}$ 的列之间的内积。

（4.56）用矩阵表示为

$$\{x'\} = \boldsymbol{A}\{x\} \qquad (4.61)$$

正交条件——二维情形　为了熟悉 a_{ij} 或正交条件，先讨论一下二维旋转（在 3 维的系统里，可认为 x_1，x_2 轴围绕 x_3 轴旋转）由第 1 章图 1.6

$$x_1' = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi,$$

$$x_2' = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi. \qquad (4.62)$$

根据（4.61）

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \qquad (4.63)$$

●须注意用的是两个独立的角标 j 与 k。

看图 1.6 就可知道 $a_{11}=\cos\varphi=\cos(x_1', x_1)$,

$$a_{12}=\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos(x_1',x_2)\text{等等}$$

矩阵元 a_{ij} 和方向余弦是一回事。(4.60) 的正交条件为

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1 \tag{4.64}$$

$$\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi=0 \tag{4.65}$$

向三维推广 (围绕 x_3 轴逆时针作角度 φ 的坐标旋转) 简单地表示成

$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{4.66}$$

$a_{33}=1$ 表示 $x_3'=x_3$。乃围绕 x_3 轴的旋转。其中有的元素为零保证了 x_1' 和 x_2' 与 x_3 无关，而且 x_3' 与 x_1 和 x_2 无关。换句话说，x_1 和 x_2 形成一不变子空间，x_3 本身就形成不变子空间。A 的普遍形式是可约的，(4.66) 给定一个可能的分解。

逆矩阵 A^{-1}　回到一般的变换矩阵 A。逆矩阵 A^{-1} 用

$$\{x\}=A^{-1}\{x'\} \tag{4.67}$$

来定义。即 A^{-1} 表示用 A 来规定的旋转的逆，使坐标系回到原来的位置。把 (4.61) 和 (4.67) 结合起来时

$$\{x\}=A^{-1}A\{x\}. \tag{4.68}$$

因 $\{x\}$ 是任意的，所以有

$$A^{-1}A=I \tag{4.69}$$

右边变成单位矩阵。同理利用 (4.61) 和 (4.67)，替换 $\{x'\}$ 并消去 $\{x\}$ 时，得

$$AA^{-1}=I. \tag{4.70}$$

转置矩阵 $\tilde{A}$　上面定义的逆矩阵 A^{-1} 的元素，利用正交条件可以确定。正交条件和矩阵乘积的定义虽不相同，但定义下列新矩阵

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ji} \quad (4.71)$$

以后，就可以写成乘积的形式。$\tilde{A}$叫做 A 的转置，把 A 的行与列交换即得，于是（4.60）变成

$$\tilde{A}A = I \quad (4.72)$$

这是正交条件的另一写法，也可以看成是正交条件的一个定义。（4.72）右乘以A^{-1}，再参考（4.70）时，有

$$\tilde{A} = A^{-1} \quad (4.73)$$

于是得到逆矩阵等于转置矩阵的重要结果，这当然只是对正交矩阵才是对的，也可看成是正交条件的另一写法。

（4.73）左乘以 A 时，得

$$A\tilde{A} = I, \quad (4.74)$$

即

$$\sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} \quad (4.75)$$

这也是正交条件的另一种形式。

这些矩阵为什么用正交这个词，现在有可能正确理解，假设方向余弦的矩阵的一般形式为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a_{ij} 是 x'_i 和 x_j 之间的角的余弦。因此 a_{11}，a_{12}，a_{13}对 x_1，x_2，x_3 来讲是 x'_1 的方向余弦。A 的这三个 元素 是 用来定义沿 x'_1 的基矢 i' 的，即

$$i' = ia_{11} + ja_{12} + ka_{13}.$$

正交关系（4.75）只是说明基矢 i'，j'，k' 相互成直角，即正交。正交变换矩阵 A 是使一个直角坐标系向第 2 个直角坐标系旋转。

欧拉角　变换矩阵 A 虽有 9个方向余弦，但其中只有三个是独立的，（4.60）规定了 6 个约束条件。要固定旋转轴

必须有两个参数（球坐标里是θ和φ）。其余参数是描写围绕固定轴的旋转量。在力学的拉格朗日形式里，与其用过多的方向余弦，倒不如用3个独立参数组来描述A。参数一般选用欧拉角❶。

这一节的目的是描述旋转系（x_1'''，x_2'''，x_3'''）对原来的坐标系（x_1，x_2，x_3）的相对方向。这要经过三个阶段才到达最后坐标系，各阶段包含用一个欧拉角来表示的一个旋转。

1. x_1'，x_2'，x_3'是将x_1，x_2，x_3围绕x_3轴逆时针旋转角α而得。（x_3和x_3'轴相等）。

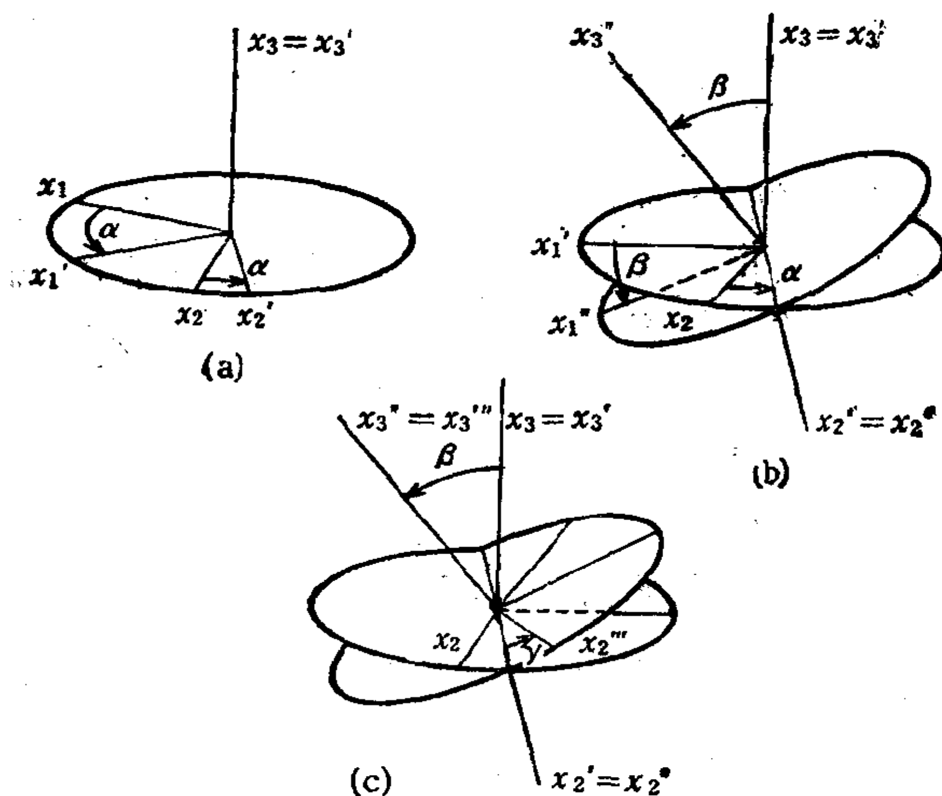


图 4.2 (a) 围绕x_3角α的旋转；(b) 围绕x_2'角β的旋转；(c) 围绕x_3''角γ的旋转

---

❶欧拉角的定义有和著者数目一样多的定义，这里选用的是在群论及角动量的量子理论领域里常用的。

2. x_1'', x_2'', x_3'' 轴是将 x_1', x_2', x_3' 轴[1]围绕 x_2'轴逆时针旋转角 β 而得（x_2' 和 x_2'' 相等）。

最后的旋转是围绕 x_3'' 轴逆时针旋转角γ，得 x_1''', x_2''', x_3''' 系（x_3'' 和 x_3''' 轴相等）。

代表这些旋转的三个矩阵是

$$R_z(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{4.76}$$

这其实就是（4.66），

$$R_y(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}, \tag{4.77}$$

以及

$$R_z(\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma & 0\\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{4.78}$$

整个旋转可用矩阵的三重积来表示

$$A(\alpha,\beta,\gamma)=R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha) \tag{4.79}$$

（连续变换的分量表示放到（4.89～4.92））。

要注意旋转次序；R_z（α）先作用，其次是 $R_y(\beta)$，最后才是$R_z(\gamma)$。直接取乘积时

$$A(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\beta\\ -\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha & -\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha+\cos\gamma\cos\alpha & \sin\gamma\sin\beta\\ \sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha & \cos\beta\end{pmatrix}. \tag{4.80}$$

[1]著者当中也有将第 2 个旋转取为围绕 x_1' 轴。

令 $A(a_{ij})$ 等于 $A(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 时，则各元素相等，就确定了用三个欧拉角来表示的方向余弦。利用这种欧拉角和方向余弦的等同性可以证明（1.41）的方向余弦恒等式。而且是比习题4.3.3更为精练的方法。

用欧拉角来描述旋转，形成在4.9节里展开的旋转群的基础。

从前面的讨论会注意到，矩阵有两种方法，一个是它的分量或把整体作为一个量来处理，各有优点，都是有用的。

再来考虑计算 $(ST)^{-1}$，假设 ST 为矩阵的乘积并有逆矩阵，很明显，有

$$(ST)(ST)^{-1}=I. \tag{4.81}$$

从左方按次序先乘以 S^{-1} 再乘以 T^{-1} 时

$$(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}. \tag{4.82}$$

即乘积的逆等于改次序的逆矩阵的乘积，这个事实很容易推广到两个以上的数的乘积。

$(\widetilde{ST})$ 的计算考虑分量来进行较为合适。令 $U=ST$ 时

$$u_{ik}=\sum_j s_{ij}t_{jk}$$

$$=\sum_j \tilde{t}_{kj}\tilde{s}_{ji}, \tag{4.83}$$

这里利用转置矩阵的定义，

$$u_{ik}=\tilde{u}_{ki}. \tag{4.84}$$

则（4.83）成为

$$(\widetilde{ST})=\tilde{T}\tilde{S}. \tag{4.85}$$

即乘积的转置等于转置矩阵的逆顺乘积。

在以上两个说明当中，须注意，并不要求 S、T 一定是正交矩阵。

对称性　转置矩阵对对称性的讨论是很有用的，如果

$$A = \tilde{A}, \quad a_{ij} = a_{ji} \tag{4.86}$$

就叫做矩阵是对称的，或

$$A = -\tilde{A}, \quad a_{ij} = -a_{ji} \tag{4.87}$$

则叫做反对称矩阵。在这种情况下对角元素为零。任意（正方）矩阵可写成对称矩阵与反对称矩阵之和。其实这并不难理解。看一下下面的恒等式，就会明白

$$A = \frac{1}{2}[A + \tilde{A}] + \frac{1}{2}[A - \tilde{A}] \tag{4.88}$$

$[A + \tilde{A}]$很明显是对称的，而 $A - \tilde{A}$ 是反对称的。这相当于有关张量的第 3 章的（3.22）的行列式。

连续旋转，矩阵的积　回到正交矩阵，继续进行坐标旋转

$$\{x'\} = A\{x\} \tag{4.89}$$

进行由 B 所规定的第 2 次旋转

$$\{x''\} = B\{x'\}, \tag{4.90}$$

用分量来表示时，有

$$\begin{aligned} x_i'' &= \sum_j b_{ij} x_j' \\ &= \sum_j b_{ij} \sum_k a_{jk} x_k \\ &= \sum_k \left(\sum_j b_{ij} a_{jk} \right) x_k. \end{aligned} \tag{4.91}$$

因就 j 求和是定义矩阵 $C = AB$ 也就是乘积，所以

$$x_i'' = \sum_k c_{ik} x_k. \tag{4.92}$$

从此可以看到矩阵乘法是有用的。

C 的物理意义表明，两个矩阵的矩阵乘积 BA 和从不带撇的系统向带两撇的系统的坐标系直接变换的旋转是相同的。

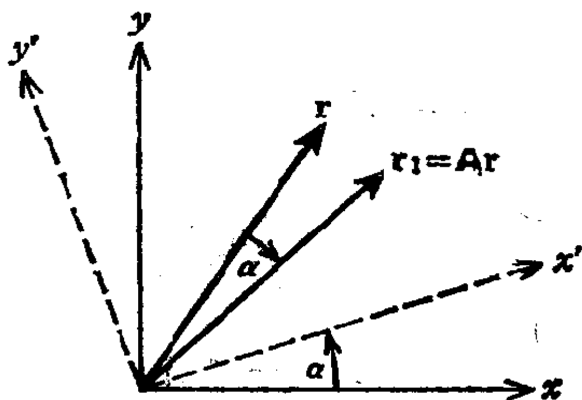


图 4.3 固定坐标—旋转矢量

到此为止，把正交矩阵解释为坐标系的旋转，根据这个旋转，某固定矢量（不和坐标系一起旋转）的分量发生变化（第1章图1.6）。但（4.89），也可以解释成该矢量向相反方向的旋转（图4.3）。

把矩阵 A 看成是把矢量 $\boldsymbol{r}$ 旋转到 $\boldsymbol{r}_1$ 所表示的位置

$$\boldsymbol{r}_1 = A\boldsymbol{r} \tag{4.93}$$

这里，利用矩阵 B 来旋转坐标，即把 (x, y, z) 旋转到 (x', y', z')

$$\begin{aligned} B\boldsymbol{r}_1 &= BA\boldsymbol{r} \\ &= BA(B^{-1}B)\boldsymbol{r} \\ &= (BAB^{-1})B\boldsymbol{r}. \end{aligned} \tag{4.94}$$

$\boldsymbol{r}_1$ 在新坐标系里用 $B\boldsymbol{r}_1$ 来表示（矢量本身不变），$B\boldsymbol{r}$ 也可以同样考虑。于是在新的系统里，位置 $(B\boldsymbol{r})$ 可用 BAB^{-1} 旋转到位置 $(B\boldsymbol{r}_1)$，换句话说，在用矩阵 B 把坐标旋转以后的新系统里，A 成为 A' 的形式

$$A' = BAB^{-1} \tag{4.95}$$

相似变换　如众所周知，矩阵 B 不要求正交时按(4.95)来定义的变换 A' 是 A 的相似变换。

(4.95)用分量表示时，有

$$a'_{ij} = \sum_{k,l} b_{ik} a_{kl} b^{-1}_{lj} \quad (4.96)$$

其中 B 如果是正交矩阵的话

$$b^{-1}_{lj} = \tilde{b}_{lj} = b_{jl} \quad (4.97)$$

所以

$$a'_{ij} = \sum_{k,l} b_{ik} b_{jl} a_{kl} \quad (4.98)$$

和张量的关系　(4.98) 和3.1节的式子相比较时，可以看出它是二阶张量的定义。从定义可知，能够正交相似变换的矩阵是张量。很明显，像 (4.93) 那样，可以看成是使矢量旋转的任意正交矩阵，可叫做张量。然而若作为确定某坐标系的新方向的方向余弦的集合来考虑正交矩阵的话，那就不能包含张量的变换。

上面定义的对称性和反对称性在正交相似变换下是守恒的。设 A 为对称矩阵 $A=\tilde{A}$。

$$A' = BAB^{-1}. \quad (4.99)$$

因 B 是正交矩阵，所以

$$\tilde{A}' = \widetilde{BAB^{-1}} = \tilde{B}^{-1}\tilde{A}\tilde{B} = B\tilde{A}B^{-1}, \quad (4.100)$$

所以 $$\tilde{A}' = BAB^{-1} = A', \quad (4.101)$$

这表明对称性在正交相似变换下是不变的，一般在非正交相似变换下，对称性是不守恒的。

习　题

假定所有矩阵元为实数。

4.3.1 试证明两个正交矩阵的乘积仍为正交矩阵。

注：这是表示所有 $n\times n$ 正交矩阵作成群的要点之一 (4.9节)。

4.3.2 如果 A 是正交矩阵，试证明其行列式的数值为 1.

4.3.3 如果 A 是正交矩阵，试证明 $a_{ij}=C_{ij}$. C_{ij} 为 a_{ij}的余因子，这是1.4节的恒等式（1.41）.

提示：注意习题 4.2.27.

4.3.4 在欧拉旋转里一般使用的其它组合为

1. 围绕 x_3 轴角度 φ 的逆时针旋转
2. 围绕 x_1' 轴角度 θ 的逆时针旋转
3. 围绕 x_3'' 轴角度 ψ 的逆时针旋转

如果
$$\alpha=\varphi-\frac{\pi}{2} \qquad \varphi=\alpha+\frac{\pi}{2}$$
$$\beta=\theta \qquad \theta=\beta$$
$$\gamma=\psi+\frac{\pi}{2} \qquad \psi=\gamma-\frac{\pi}{2}$$

试证明最后坐标系等于开始的坐标系.

4.3.5 使地球旋转，新北极来到北纬 30°西经 20°，在新西经 20°的子午线上，指向正南的一点

(a) 描述这个转动的欧拉角如何？

(b) 试求和上述相对应的方向余弦

$$\text{答 (b)} A=\begin{pmatrix} 0.9551 & -0.2552 & -0.1504 \\ 0.0052 & 0.5221 & -0.8529 \\ 0.2962 & 0.8138 & 0.5000 \end{pmatrix}$$

4.3.6 证明欧拉角的旋转矩阵（4.80）在下列变换下保持不变.

$$\alpha\to\alpha+\pi \quad \beta\to-\beta \quad \gamma\to\gamma-\pi.$$

4.3.7 证明对称矩阵和反对称矩阵乘积的迹为零.

4.3.8 证明在相似变换下矩阵的迹保持不变.

4.3.9 证明在相似变换下矩阵的行列式保持不变.

4.3.10 证明在正交相似变换下反对称的性质保持不变.

4.3.11 证明在正交相似变换下矩阵元的平方和保持不变。

4.3.12 作为 4.3.11 的推广，证明

$$\sum_{jk} S_{jk}T_{jk} = \sum_{l,m} S'_{lm}T'_{lm}$$

其中假设不带撇的元素和带撇的元素通过正交相似变换相联系。这个结果在电磁学里对推导不变量有用。（参考3.7节）。

4.3.13 假设围绕 z 轴的旋转 $\varphi_1+\varphi_2$，作为围绕 z 轴的两个旋转 φ_1 和 φ_2 连续进行。利用旋转的矩阵表示。试推导出三角函数和的恒等式。

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2$$

4.4 斜交坐标

整个这本书，矢量分析、坐标系、张量分析，以及矩阵等，我们都把坐标看成是正交的．然而有时因物理系统的要求，使用非正交坐标系即斜交坐标系才合适．比如为描述某晶体的物理性质，利用根据晶体的轴选定的坐标系是最方便的。这些轴经常是斜交的．

考虑不在同一平面上，基矢 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不正交的坐标系（为描述晶体，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 也没有必要一定是单位大小。形成晶体的原子间的间隔也许是它的适当长度）．任意矢量可写成

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{i}V_x+\boldsymbol{j}V_y+\boldsymbol{k}V_z=\boldsymbol{a}\mathrm{v}_a+\boldsymbol{b}\mathrm{v}_b+\boldsymbol{c}\mathrm{v}_c=\mathrm{v} \qquad (4.102)$$

假设 $\boldsymbol{V}$ 是用通常的直角坐标系来表示的矢量，v是相同的矢量用斜交坐标表示。

作为特殊情形（二维），$\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{V}$ 都在 $x=0$的平面上的情况，如图 4.4 所示．

现在须注意，能够求出 $\boldsymbol{V}$ 的尖端平行于 c 的投影的分量 v_b 和平行于 $\boldsymbol{b}$ 的投影的分量 v_c。一般（三维）求沿一个

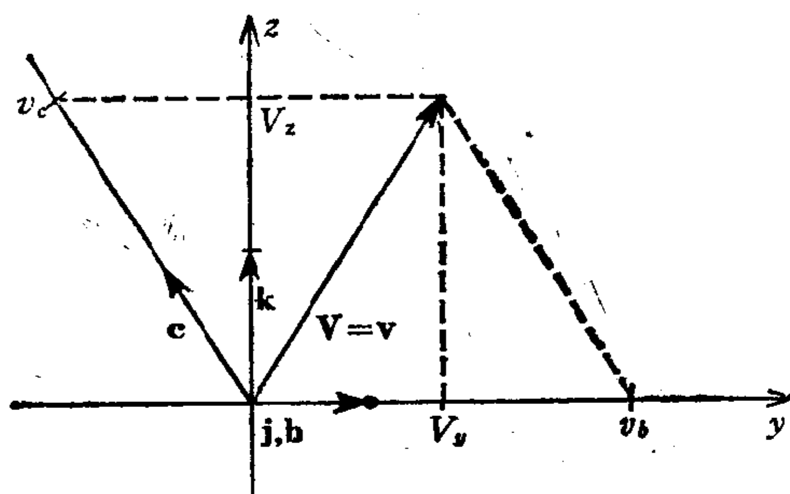


图 4.4 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{j}V_y+\boldsymbol{k}V_z=\boldsymbol{b}\nu_b+\boldsymbol{c}\nu_c=\mathbf{v}$

基矢方向分量的手续也就是确定一个平面，要求这个平面和其它两个基矢所组成的平面平行而且通过 $\boldsymbol{V}$ 的尖端。把用这一方法求得的分量，按照1.1节矢量和的三角形或平行四边形法则去求和就正好得到 $\boldsymbol{V}$。

如4.3节所作的那样，从（4.102）$\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}'$ 分别用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，处理时。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{i}a_x+\boldsymbol{j}a_y+\boldsymbol{k}a_z\\ \boldsymbol{b}&=\boldsymbol{i}b_x+\boldsymbol{j}b_y+\boldsymbol{k}b_z\\ \boldsymbol{c}&=\boldsymbol{i}c_x+\boldsymbol{j}c_y+\boldsymbol{k}c_z\end{aligned}\tag{4.103}$$

假设直角坐标分量相等

$$\begin{aligned}V_x&=a_x\nu_a+b_x\nu_b+c_x\nu_c\\ V_y&=a_y\nu_a+b_y\nu_b+c_y\nu_c\\ V_z&=a_z\nu_a+b_z\nu_b+c_z\nu_c\end{aligned}\tag{4.104}$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{V}=P\mathbf{v}\tag{4.105}$$

但

$$P=\begin{pmatrix}a_x & b_x & c_x\\ a_y & b_y & c_y\\ a_z & b_z & c_z\end{pmatrix}\tag{4.106}$$

变换矩阵 P 不是正交矩阵，原因是作成列矢量的 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$并不

是正交的，由

$$\mathrm{v} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{V} \tag{4.107}$$

作出 $\boldsymbol{P}^{-1}$。答案在1.5节已求过，晶格倒矢量可由行矢量确定

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}, \quad \boldsymbol{b}' = \frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}, \quad \boldsymbol{c}' = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}. \tag{4.108}$$

这可归纳为一个矩阵 Q

$$Q = \begin{pmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \\ c'_x & c'_y & c'_z \end{pmatrix} \tag{4.109}$$

须强调指出 $\boldsymbol{a}'$，$\boldsymbol{b}'$，$\boldsymbol{c}'$ 不是正交的。而且这些矢量不具有单位长度．如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 有某种量纲的话，则 $\boldsymbol{a}'$，$\boldsymbol{b}'$，$\boldsymbol{c}'$ 有逆量纲．如果 $\boldsymbol{a}$ 代表长度，则 $\boldsymbol{a}'$ 代表波数。根据1.5节求得的性质．

$$PQ = QP = 1, \tag{4.110}$$

即
$$Q = P^{-1}, \quad P = Q^{-1}. \tag{4.111}$$

在习题4.4.1里推导 Q 有些不同，但思路相同，根据(4.107)和（4.111）

$$\mathrm{v} = Q\boldsymbol{V} \tag{4.112}$$

取（4.105）和（4.112）的转置时

$$[V] = [\mathrm{v}]\tilde{P} \qquad [\mathrm{v}] = [V]\tilde{Q} \tag{4.113}$$

和4.2节一样[ ]代表行矢量。如同 $\boldsymbol{V}$ 可以在 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 空间里分解一样，也可以在（倒格矢）$\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c}'$ 空间里分解．给（4.102～107）带上撇号，得

$$\boldsymbol{V} = \tilde{Q}\mathrm{v}', \quad \mathrm{v}' = \tilde{P}\boldsymbol{V} \tag{4.114}$$

及
$$[V] = [\mathrm{v}']Q, \quad [\mathrm{v}'] = [V]P \tag{4.115}$$

根据（4.112）和（4.115）两个矢量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 的标量积为

$$[U]\{V\} = [U]PQ\{V\} = [u']\{\nu\} \qquad (4.116)$$

{ }代表列矢量．在斜交坐标里，某矢量的平方不等于分量的平方和，而是斜交坐标的分量与对应的倒格矢的分量的乘积的和．在上面的（4.116）里，假设 U 和 V 是微小长度 $d\boldsymbol{R}=(dx,dy,dz)$ 时，由（4.105），和（4.116）可得

$$ds^2 = [dR]\{dR\} = [d\boldsymbol{r}]\tilde{P}P\{d\boldsymbol{r}\}. \qquad (4.117)$$

ds^2 为距离元的平方．$d\boldsymbol{r}$ 虽和 $d\boldsymbol{R}$ 相同，但可分解为斜交坐标．根据（2.4），$\tilde{P}P$ 等于斜交坐标的距离．倒格点的距离为 $Q\tilde{Q}$．

矢量分析，特别是在斜交坐标里进行矢量计算，在非正交系的张量分析范围内来考虑问题也许更为合适．用3.1节的说法，则 $\mathbf{v}=(\nu_a,\nu_b,\nu_c)$ 为逆变矢量．与此相对应协变矢量为倒格矢的（ν'_a，ν'_b，ν'_c）．根据（4.105）（4.112），（4.114），有

$$\{\nu'_i\} = \tilde{P}P\{\nu_i\}, \quad \{\nu_i\} = Q\tilde{Q}\{\nu'_i\}. \qquad (4.118)$$

距离 $\tilde{P}P$ 使逆变矢量变换成协变矢量，相反 $Q\tilde{Q}$ 把协变矢量变成逆变矢量．

习　题

4.4.1 根据习题4.2.27的结果 $q_{ij}=\dfrac{P_{ji}}{|P|}$ 试推导下列关系

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}.$$

4.4.2 用某特定斜交坐标定义的矢量

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{c}=(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/\sqrt{2}.$$

(a) 试求 P、Q 以及距离 $\tilde{P}P$．

(b) 如果 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试求 $\mathbf{v}$ 及 $\mathbf{v}'$，并证明下式

$$[\nu']\{\nu\} = V^2.$$

4.4.3 证明下列各式

$$\text{(a)}\quad \nu_a' = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V},$$

$$\text{(b)}\quad \nu_a = \boldsymbol{a}'\cdot V.$$

须注意，定义矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}'$的晶格勿须具有单位大小。

4.5 厄米特矩阵，么正矩阵

定 义 到目前为止一般假定矩阵元为实数，在经典物理学的大量计算里，实数矩阵元也许够用了。然而在量子力学里，从作为基础的对易关系的形式（或从与时间有关的薛定谔方程的形式）来看，复数是不可避免的。因此向复数矩阵元推广。为便于处理这些元素，定义若干新的性质，并予以命名。

1. 复数共轭矩阵 A^* 取各元素的复数共轭 $(i \to -i)$ 而成，但 $i = \sqrt{-1}$。
2. 转置共轭矩阵 A^+ 取 A^* 的转置而成

$$A^+ = \tilde{A}^* = \tilde{A}^* \tag{4.119}$$

3. 厄米特矩阵 若矩阵 A 有

$$A = A^+ \tag{4.120}$$

就叫做厄米特矩阵（自共轭矩阵）

在量子力学（或矩阵力学），矩阵通常作成厄米特矩阵。

4. 么正矩阵，矩阵如果有

$$U^+ = U^{-1}, \tag{4.121}$$

则称为么正矩阵。这是正交矩阵（比如（4.73））概念的推广。如果矩阵元素是复数时，则物理学者在大多数情形都对转置共轭矩阵、厄米特矩阵或么正矩阵颇为关注。在量子力学里么正矩阵特别重要、原因是它们不改变（复数）矢量的长度，这和用正交矩阵乘实数矢量相类似。一个重要例外是洛仑兹矩阵群（3.7节及4.12节）。

利用闵可夫斯基空间后，这些矩阵虽是正交的但不是么正的。

如果相似变换的变换矩阵是么正的话，这个变换就叫做么正变换。

$$A' = UAU^{+} \tag{4.122}$$

和两个正交矩阵的乘积仍是正交矩阵（习题4.3.1）一样，两个么正矩阵的乘积仍具有么正性。如果U_1，U_2是么正的，利用么正性质时，有

$$\begin{aligned} I &= (U_1U_2)(U_1U_2)^{-1} \\ &= U_1U_2U_2^{-1}U_1^{-1} \\ &= U_1U_2U_2^{+}U_1^{+}. \end{aligned} \tag{4.123}$$

因作转置共轭矩阵和转置一样（复数共轭除外）根据习题4.5.2有

$$(U_1U_2)^{+} = U_2^{+}U_1^{+}. \tag{4.124}$$

代入（4.123）

$$I = (U_1U_2)(U_1U_2)^{+}. \tag{4.125}$$

左乘以$(U_1U_2)^{-1}$时，得

$$(U_1U_2)^{-1} = (U_1U_2)^{+} \tag{4.126}$$

这表明么正矩阵的乘积仍是么正矩阵。这代表$n\times n$么正矩阵作成群（4.9节）的条件之一。这些概念的其它性质或应用放到本节末习题里。

泡里矩阵　在电子的相对论里，利用了4×4的复数矩阵，要展开这些4×4矩阵，用三个2×2泡里矩阵的组合作为出发点很方便。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.127}$$

泡里为描述自旋为1/2的粒子（非相对论情况）引进这个矩

阵的，容易证明泡里矩阵满足下列关系（习题4.2.12）

$$\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=2\sigma_{ij}I \quad 反对易 \tag{4.128}$$

$$\sigma_i\sigma_j=i\sigma_k \quad 下标循环置换 \tag{4.129}$$

$$(\sigma_i)^2=1 \tag{4.130}$$

狄拉克矩阵　狄拉克在1927年推广了这一公式。他求出了四个反对易矩阵。因三个泡里矩阵加上单位矩阵时成为完全系，所以任意 2×2 矩阵 M 可写成

$$M=c_0I+c_1\sigma_1+c_2\sigma_2+c_3\sigma_3 \tag{4.131}$$

其中 c_0，c_1，c_2，c_3 为常数。因不存在第4个反对易矩阵，所以在推广后的理论里，泡里的 2×2 矩阵并不充分。这也说明 3×3 矩阵同样也不能确定四个反对易矩阵的组合。进入 4×4 矩阵时，用泡里矩阵和单位矩阵的直积可作出完全系，假设

$$\sigma_{i,狄拉克}=I\otimes\sigma_{i,泡里} \tag{4.132}$$

$$\rho_{j,狄拉克}=\sigma_{j,泡里}\otimes I \tag{4.133}$$

比如

$$\sigma_2=\begin{pmatrix} I(\sigma_2) & 0 \\ 0 & I(\sigma_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这些 4×4 矩阵满足下列关系

$$\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=2\delta_{ij}I,$$

$$\rho_i\rho_j+\rho_j\rho_i=2\delta_{ij}I, \quad 反对易 \tag{4.134}$$

$$\sigma_i\rho_j-\rho_j\sigma_i\equiv[\sigma_i,\rho_j]=0 \quad 对易 \tag{4.135}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i\sigma_j&=i\sigma_k,\\ \rho_i\rho_j&=i\rho_k\end{aligned}\right\} 循环置换 \tag{4.136}$$

这些矩阵的乘积可以作出表（表4.1）

表 4.1 狄拉克矩阵

	I	σ_1	σ_2	σ_3
I	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ I	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ σ_1	$\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}$ σ_2	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ σ_3
ρ_1	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ $\rho_1, -\gamma_5$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ α_1	$\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}$ α_2	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$ α_3
ρ_2	$\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&-i\\i&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix}$ ρ_2, α_5	$\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}$ γ_1	$\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$ γ_2	$\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}$ γ_3
ρ_3	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ $\rho_3, \alpha_4, \gamma_4, \beta$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$ δ_1	$\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{pmatrix}$ δ_2	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ δ_3

狄拉克起初选取了命名为 α_1，α_2，α_3，α_4 的四个矩阵的组合，让它们满足 $\alpha_i = \rho_1\sigma_i$ 以及 $\alpha_4 = \rho_3$。然而目前更普遍地采用命名为 γ_i，$i=1$，2，3，4，5 的组合。

这些矩阵根据

$$E_{ij} = \rho_i\sigma_j.$$

也采用叫做 E_{ij} 的形式，其中若认为 $\rho_0 = \sigma_0 = I$ 即单位矩阵时，则下标 i 和 j 由 0 变到 3。16 个矩阵 E_{ij} 具有一系列有趣的性质

1. Det $E_{ij} = +1$。

2. $E_{ij}^2 = 1$。

3. $E_{ij}=E_{ij}^{\dagger}$；由于都是厄米的，所以根据性质2也是幺正的。

4. $\mathrm{trace}(E_{ij})=0$；但$E_{00}=I$例外，在这种情况下$\mathrm{trace}(E_{00})=4$。

5. 16个矩阵E_{ij}大体上形成数学上的群●，任意两个相乘时，在因子-1或i的范围内给出这个集合的元素。

6. 16个E_{ij}是线性独立的，任何一个都不能写成其它15个的线性求和。

7. 16个E_{ij}形成完全集合具有任意常数元素的4×4矩阵可写成这16个的线性组合。

$$A=\sum_{i,j=0}^{3}C_{ij}E_{ij},$$

其中系数C_{ij}为实数或复数常数。

反对易集合　由这16个厄米特矩阵，可作出6组集合。分别用5个反对易矩阵作成，根据表4.1的命名方式这些集合为

$$
\begin{aligned}
&1.\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\\
&2.\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5,\\
&3.\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \rho_1,\ \rho_2,\\
&4.\ \alpha_1,\ \gamma_1,\ \delta_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\\
&5.\ \alpha_2,\ \gamma_2,\ \delta_2,\ \sigma_1,\ \sigma_3,\\
&6.\ \alpha_3,\ \gamma_3,\ \delta_3,\ \sigma_1,\ \sigma_2,
\end{aligned}
\tag{4.137}
$$

除去单位矩阵的各E_{ij}以外，在上述集合都出现两次。和α的集合一起γ的集合，在相对论量子理论当中普遍采用。

●虽可进行使E_{ij}严格满足群的性质的修正，但这时它不是厄米的也不是幺正的。

包含单位矩阵的狄拉克矩阵的完全对易组合虽最多，也不过只有四个矩阵。

4.3 节的正交矩阵的讨论也好，这一节的么正矩阵也好，只不过是个开头而已，其它的推广在现代基本粒子物理里才是极为重要的。为利用泡里和狄拉克矩阵来描述电子、质子及其它自旋为 1/2 的粒子，可开展旋量理论。坐标旋转引出 $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$ 即旋转群，这可以用通常描述这个旋转的欧拉角的函数作为元素的矩阵来表示。特殊么正群 $SU(3)$（用 3×3 的行列式为 $+1$ 的么正矩阵组成）用来描述介子或重子（Baryon）获得了很大成功。它们的推广在 4.9.4，11 节还要作进一步的探讨。

习　题

4.5.1 三个角动量矩阵满足基本对易关系

$$[j_x, j_y]=ij_z$$

（以及下标的循环置换）如果其中两个矩阵有实数元素的话，试证明第 3 个矩阵的元素必然是纯虚数。

4.5.2 证明 $(AB)^+=B^+A^+$。

4.5.3 取矩阵 $C=S^+S$，只要 S 不是零，证明矩阵的迹为正定值。S 等于零时 $\mathrm{trace}(C)=0$。

4.5.4 如里 A 和 B 是厄米特矩阵时，证明 $(AB+BA)$ 也好，$i(AB-BA)$ 也好都是厄米特的。

4.5.5 证明厄米特矩阵在么正相似变换下仍保持厄米特性。

4.5.6 两个矩阵 A 和 B 分别是厄米特的，试求乘积 AB 仍为厄米特的充分且必要条件。

答 $[A,B]=0$

4.5.7 证明么正矩阵的逆矩阵仍是么正的。

4.5.8 给定某相似变换

$$A' = UAU^{-1}$$

$$A^{+\prime} = UA^{+}U^{-1}.$$

如果保持转置共轭关系并让（$A^{+\prime} = A^{\prime +}$）或 $\det U = 1$ 时，试证明 U 必须是么正的。

4.5.9 两个矩阵 U 和 H 有下列关系

$$U = e^{iaH}$$

但 a 为实数（指数函数矩阵可解释为麦克劳林展开，这在 4.10 节进行）。

(a) 如果 H 是厄米特的，证明 U 是么正的。

(b) 如果 U 是么正的，证明 H 是厄米特的（包含 $\frac{2\pi n}{a}$ 形式的项）。

4.5.10 证明两个么正矩阵的直积仍是么正的。

4.5.11 证明所有的4×4矩阵（各元素为复数），能用 I，γ_1，γ_2，γ_3，γ_4 以及 γ 的乘积的线性组合来表示。

4.5.12 用 $E_{ij} = \rho_i\sigma_j$（$\rho_0 = \sigma_0 = I$）来表示16个狄拉克矩阵时，证明

(a) 对所有的 i 和 j，$E_{ij}^2 = 1$。

(b) $E_{ij} = E_{ij}^{\dagger}$（厄米特）

提示：利用 ρ_i、σ_j 的已知性质。

4.5.13 就4×4 σ 矩阵以及 ρ 矩阵，推导(4.134)～(4.136)。

4.5.14 利用（4.135）和（4.136）证明列举于（4.137）的各6个狄拉克矩阵的组合，实际上是反对易的组合。

4.5.15 利用（4.135），（4.136）证明

(a) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 = +1$，

(b) $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5 = +1$。

4.5.16 如果$M=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)$，证明

$$M^2=M.$$

注意γ_5可以用任意其它狄拉克矩阵来置换（表4.1的任何一个E_{ij}都可以）如果M是厄米特的，这个结果的$M^2=M$就是量子力学算符的定义式。

4.5.17 证明 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\alpha}=2i\boldsymbol{\sigma}$

但$\boldsymbol{\alpha}$是以α矩阵为分量的矢量

$$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3).$$

注意若$\boldsymbol{\alpha}$为极矢量时（3.4节），则$\boldsymbol{\sigma}$为轴矢量。

4.5.18 证明16个狄拉克矩阵作成线性独立的集合。

提示：假定它的逆。让E_{mn}是其它E_{ij}等的线性组合。乘以E_{mn}，取矩阵的迹。证明其结果是矛盾的。

4.5.19 (a) 假定某4×4矩阵A（有常数元素）可写成16个狄拉克矩阵的线性组合

$$A=\sum_{i,j=0}^{3}C_{ij}E_{ij}$$

这时，证明下式

$$C_{mn}=\frac{1}{4}\mathrm{trace}(AE_{mn}).$$

(b) 假定A只有一个不为零的元素时，证明在它的展开里只有四个不为零的系数。

(c) 试用E_{ij}展开

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

答　$A=\frac{1}{4}(E_{00}+E_{03}+E_{30}+E_{33})$

$$=\frac{1}{4}(1+\sigma_3+\rho_3+\delta_3)\ .$$

4.5.20　如果A是狄拉克矩阵的一个（单位矩阵除外）时，则它和8个狄拉克矩阵对易，和其它8个反对易。试举出和γ_1反对易的8个矩阵。

答　σ_2，σ_3，ρ_1，α_1，γ_2，γ_3，ρ_3，δ_1。

4.5.21　为分析洛仑兹变换有无协变性，狄拉克的电子论可用γ_μ，$\mu=1$，2，3，4来表示。试证明用这四个矩阵和它的乘积

(a)　$\gamma_\mu\gamma_\nu$，$\mu\neq\nu$

(b)　$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda$（设下标都不同）

(c)　$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$

以及单位矩阵，可改写16个狄拉克矩阵（常系数除外）。

4.5.22　已知$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{U}$为么正矩阵，$\boldsymbol{r}$为列矢量假定有复数分量。证明在此运算当中$\boldsymbol{r}$的模（大小）不变。

4.6　矩阵的对角化

转动惯量矩阵　在许多含有矩阵的物理问题里，为了使矩阵对角化，让所有非对角元素为零，就需要进行某（实数的）正交相似变换或么正变换。最明显的例子就是刚体的转动惯量矩阵I。由角动量$\boldsymbol{L}$的定义，$\boldsymbol{\omega}$为角速度，则有

$$\boldsymbol{L}=I\boldsymbol{\omega}\tag{4.138}$$

转动惯量矩阵I有对角分量

$$I_{xx}=\sum_i m_i(r_i^2-x_i^2)\ ,\ 等\tag{4.139}$$

但下标i和质量m_i有关。作为非对角项存在惯量积

$$I_{xy}=-\sum_i m_i x_i y_i = I_{yx} \qquad (4.140)$$

容易看出矩阵 I 是对称的。而且 I 以（4.138）的形式出现于物理方程之中，对坐标系的所有方向都成立，所以也可以认为是张量（商规则 3.3 节）。

现在的问题是，要使 I_{xy} 及其它非对角元素为零，怎样来确定空间坐标轴的取向。这个方向确定以后，若角速度沿该轴之一来确定的话，则角速度和角动量是平行的。

几何的描述——椭圆体　研究这个问题的几何描述也许是有意义的，如果从转动惯量的两侧乘以方向可变的单位矢量 $\boldsymbol{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$ 时。

$$[n]I\{n\}=I. \qquad (4.141)$$

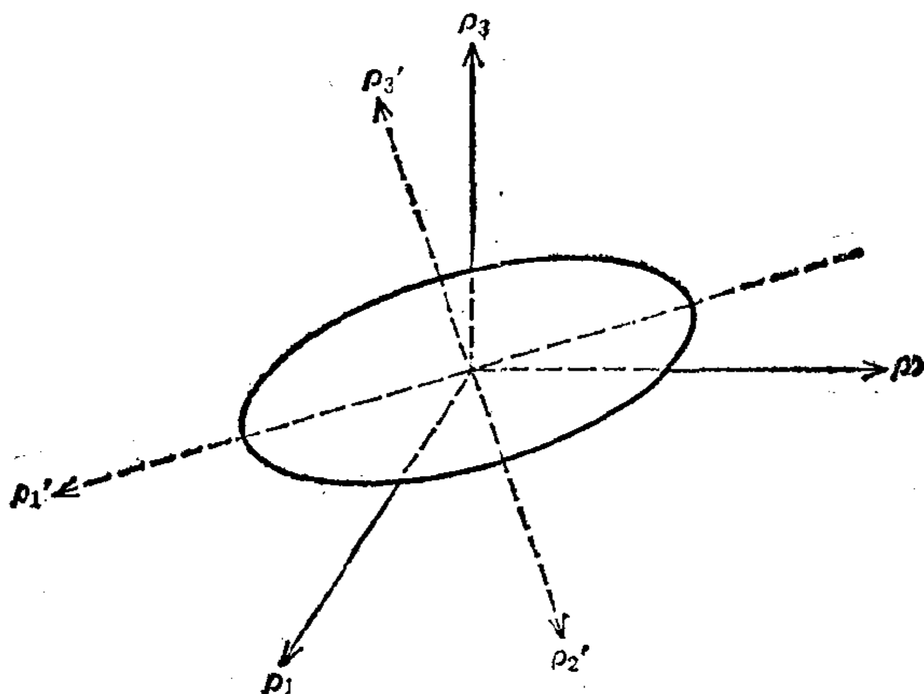


图 4.5　转动惯量的椭圆体

其中 I 为纯数（标量），它的方向决定于 $\boldsymbol{n}$ 的方向的选择。取乘积时，有

$$I=I_{xx}\alpha^2+I_{yy}\beta^2+I_{zz}\gamma^2+2I_{xy}\alpha\beta+2I_{xz}\alpha\gamma+2I_{yz}\beta\gamma \qquad (4.142)$$

为使它相当于椭圆体的标准形之一，用

$$\rho=\frac{n}{\sqrt{I}} \tag{4.143}$$

引进 ρ 时，ρ 的大小和方向都是可变的。则（4.142）变成

$$I=I_{xx}\rho_1^2+I_{yy}\rho_2^2+I_{zz}\rho_3^2+2I_{xy}\rho_1\rho_2+2I_{xz}\rho_1\rho_3+2I_{yz}\rho_2\rho_3 \tag{4.144}$$

这是对坐标 ρ_1，ρ_2，ρ_3 的椭圆体的一般形式，从解析几何可知，使坐标轴旋转到椭圆体的轴总是可能的。于是

$$I=I_1\rho_1'^2+I_2\rho_2'^2+I_3\rho_3'^2 \tag{4.145}$$

其中 ρ_1'，ρ_2'，ρ_3' 为新的坐标组。

主轴　在许多基本情形，尤其是存在对称性的情况下，容易看出这些新的轴叫做主轴。我们来讨论一下求对角元素和主轴的一般方法。

厄米特矩阵　首先讨论和对角元素和主轴有关的重要定理，在方程

$$A\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{r}. \tag{4.146}$$

其中 λ 作为由数（标量）来确定的本征值是众所周知的。$\boldsymbol{r}$ 乃是和它相对应的矢量叫做本征矢[1]。这个名词——本征（Eigen）是从量子力学初期的德文文献引进的。这里，如果 A 是厄米特的[2]，则本征值为实数，并表示本征矢（本征值不同的话）是正交的。

λ_i 和 λ_j 为两个本征值，$\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{r}_j$ 分别为对应的厄米特矩阵 A 的本征矢，于是

$$A\boldsymbol{r}_i=\lambda_i\boldsymbol{r}_i \tag{4.147}$$

$$A\boldsymbol{r}_j=\lambda_j\boldsymbol{r}_j. \tag{4.148}$$

---

[1] 当 ω 沿主轴之一时，则(4.138)就是这种形式，于是有 $L=\lambda\omega$，$1\omega=\lambda\omega$。

[2] 如果 A 为实数矩阵时，则厄米特性的要求替换以对称性。

（4.147）乘以 r_j^+ 时，有

$$r_j^+ A r_i = \lambda_i r_j^+ r_i \tag{4.149}$$

（注意若 r 为列矢量时，则 r^+为行矢量）。

（4.148）乘以 r_i^+时

$$r_i^+ A r_j = \lambda_j r_i^+ r_j. \tag{4.150}$$

取这个式子的共轭形式

$$r_j^+ A^+ r_i = \lambda_j^* r_j^+ r_i. \tag{4.151}$$

因 A是厄米特的，所以

$$r_j^+ A r_i = \lambda_j^* r_j^+ r_i. \tag{4.152}$$

从（4.149）减去（4.152）时

$$(\lambda_i - \lambda_j^*)\ r_j^+ r_i = 0. \tag{4.153}$$

这是对 i 和 j 的所有可能组台的一般结果。首先让 $i=j$ 时，则（4.153）可写成

$$(\lambda_i - \lambda_i^*)|r_i|^2 = 0. \tag{4.154}$$

其中$|r_i|=0$作为（4.154）的解，没有什么意义，所以可得如下结论

$$\lambda_i = \lambda_i^*, \tag{4.155}$$

即对所有的 i，λ_i 为实数。

第 2，对于$i \neq j$，因 $\lambda_i \neq \lambda_j$，故有

$$(\lambda_i - \lambda_j) r_j^+ r_i = 0 \tag{4.156}$$

即

$$r_j^+ r_i = 0. \tag{4.157}$$

它的意义是，属于不同本征值的本征矢是正交的，因此（4.157）乃是正交性向复空间的推广[1]。

如果 $\lambda_i = \lambda_j$ 时（简并情形），r_i 虽不与 r_i 自动正交，但可使之正交。作为物理问题仍考虑转动惯量矩阵。假设x_i

[1] 微分算符里与此相对应的理论（休兹姆·刘维理论）在 9.2 节出现，积分方程的类似理论（希尔柏特·休密特理论）在16.4节给出。

为旋转对称轴时，大概可以看出 $\lambda_2=\lambda_3$。本征矢 $\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{r}_3$ 虽与对称轴垂直，但在与 $\boldsymbol{r}_1$ 垂直的平面上可以取任何方向，即 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_3$ 的任何线性组合仍是本征矢。设 a_2 和 a_3 为常量考虑 $(a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3)$。于是因 x_1 为旋转对称轴，所以有

$$A(a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3)=a_2\lambda_2\boldsymbol{r}_2+a_3\lambda_3\boldsymbol{r}_3$$
$$=\lambda_2(a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3) \qquad (4.158)$$

正是意料之中的。若假定 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 已经固定时，$\boldsymbol{r}_3$ 也能在单单垂直于 $\boldsymbol{r}_1$ 的平面上选得与 $\boldsymbol{r}_2$ 垂直。使解正交化的普遍方法采用休密特方法。上面讨论的内容本质上是存在定理。为了求本征值 λ_i 和本征矢 $\boldsymbol{r}_i$，我们回到（4.146），认为 $\boldsymbol{r}$ 带有单位矩阵，则（4.146）可改写为

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{r}=0 \qquad (4.159)$$

其中 I 为单位矩阵，这是一次联立方程的集合。根据4.1节，只有系数行列式等于零时，才有有意义的解，所以

$$|A-\lambda I|=0. \qquad (4.160)$$

考虑 A 为3×3厄米特矩阵的情形

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (4.161)$$

（4.161）由于天文学的应用，而得名为久期方程。这个式子给出 λ 的三次式，当然它有三个根，从（4.155）可以看出这个解是实数。把一个根代入（4.159）时，可求得和它相对应的本征矢。

例4.6.1设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.162)$$

久期方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0。\tag{4.163}$$

展开成子行列式

$$-\lambda(\lambda^2 - 1) = 0,\tag{4.164}$$

根为 $\lambda = -1$，0，1，为了求对应于 $\lambda = -1$ 的本征矢，把这个値代回本征值方程（4.159）时

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}。\tag{4.165}$$

让 $\lambda = -1$

$$x + y = 0,$$

$$z = 0.\tag{4.166}$$

除了任意的标量因子和任意符号（位相因子），有 $\boldsymbol{r}_1 = (1, -1, 0)$.在通常的空间里，因 $\boldsymbol{r}$ 为实数，本征矢在空间里也不过只能确定一条线而已，这是必须充分注意的．不能规定正负号，只要注意到（4.159）是 $\boldsymbol{r}$ 的齐次式的话，这种不确定性是在意料之中的。为方便起见，将本征矢规格化，因而 $|\boldsymbol{r}_i| = 1$，故有

$$\boldsymbol{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right).\tag{4.167}$$

于是选定了符号就可以确定 $\boldsymbol{r}_1$。对 $\lambda = 0$，（4.159）为

$$y = 0,$$

$$x = 0\tag{4.168}$$

把 $\boldsymbol{r}_2 = (0,\ 0,\ 1)$ 作为本征矢是适当的，最后对 $\lambda = 1$，有

$$-x + y = 0,$$

$$z = 0\tag{4.169}$$

即

$$\boldsymbol{r}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right).\tag{4.170}$$

不难证明，对应于三个不同本征值的本征矢 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 的

正交性。

例4.6.2考虑

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \tag{4.171}$$

久期方程为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&-\lambda&1\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{4.172}$$

即 $$(1-\lambda)(\lambda^2-1)=0,\quad \lambda=-1,\ 1,\ 1 \tag{4.173}$$

是简并情形。如果 $\lambda=-1$ 时，本征值方程给出

$$2x=0,$$

$$y+z=0 \tag{4.174}$$

规格化的本征矢为

$$\boldsymbol{r}_1=\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right). \tag{4.175}$$

对 $\lambda=1$，得

$$-y+z=0 \tag{4.176}$$

更多的结果是得不到的。由于我们有很多的选择，作为一个可能的选择，取 $\boldsymbol{r}_2$ 为

$$\boldsymbol{r}_2=\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \tag{4.177}$$

时，很明显它满足（4.176），于是 $\boldsymbol{r}_3$ 必须和 $\boldsymbol{r}_1$ 正交，而且也能让它和 $\boldsymbol{r}_2$ 正交，所以有

$$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=(1,\ 0,\ 0)\ . \tag{4.178}$$

对角化 用存在定理的表述来展开方程，可用来作出将厄米特矩阵 A 变换成对角型的变换矩阵。让 R 是将三个正交列矢量 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 按任意次序作出的矩阵

$$R=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \qquad (4.179)$$

其中列$\{x_i, \ y_i, \ z_i\}$为本征矢$\boldsymbol{r}_i$。因

$$\boldsymbol{r}_i{}^+\boldsymbol{r}_j=\delta_{ij} \qquad (4.180)$$

所以 R 是么正的（另外 A 为实数矩阵，因此若$\boldsymbol{r}_i$ 也是实矢量时，则只是正交矩阵罢了）。于是作出 R^+AR时

$$R^+AR=\begin{pmatrix} [\boldsymbol{r}_1{}^*] \\ [\boldsymbol{r}_2{}^*] \\ [\boldsymbol{r}_3{}^*] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_3) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} [\boldsymbol{r}_1{}^*] \\ [\boldsymbol{r}_2{}^*] \\ [\boldsymbol{r}_3{}^*] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\lambda_1\boldsymbol{r}_1)(\lambda_2\boldsymbol{r}_2)(\lambda_3\boldsymbol{r}_3) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad (4.181)$$

R^+AR为具有本征值λ_i的对角矩阵，其本征值的顺序对应R的列矢量$\boldsymbol{r}_i$的顺序。为几何描述，考虑对称的实矩阵A。A伴随着实数本征值和实矢量，矩阵R对应于（4.95）的B^{-1}，或让$\tilde{R}$对应于B也可以。用行矢量写出的本征矢$\boldsymbol{r}_i$能构成$\tilde{R}$。

$$\begin{pmatrix} [\boldsymbol{r}_1] \\ [\boldsymbol{r}_2] \\ [\boldsymbol{r}_3] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \qquad (4.182)$$

其中(b_{i1}, b_{i2}, b_{i3})是按起初的坐标系来定义单位矢量$\boldsymbol{r}_i$的，所以对起初的坐标轴规定了$\boldsymbol{r}_i$的三个方向余弦。只要回忆一下，矩阵B使坐标系旋转，新系要取得能使A对角化，就不难看出这个新系可以由三个本征矢$\boldsymbol{r}_i=(x_i, \ y_i, \ z_i)$来规

定。这些是沿着主轴的单位矢量，这个轴使得 A 对角化。

上面的分析，对矩阵的对角化，弄清其概念是有好处的。但比3×3更大的4×4矩阵，其过程变得非常复杂，我们就得求助于高速计算机和反复法。这种技术之一是确定实对称矩阵的本征矢的雅可比法。

习　题

4.6.1 证明某矩阵的本征值在相似变换下保持不变。

这个性质并不限于对称矩阵或厄米特矩阵，也适用于能用么正矩阵或相似变换进行对角化的任何矩阵。作为这种本征值的不变性的结果，就有

(a) 矩阵的迹（本征值的和）对相似变换是不变的（习题4.3.8）

(b) 行列式（本征值的乘积）对相似变换是不变的（习题4.3.9）。

4.6.2 作为由厄米特矩阵的项所确定的定理的逆，如果

(a) 某矩阵的本征值为实数，(b)本征矢满足(4.180) $\mathbf{r}_i^\dagger \mathbf{r}_j = \delta_{ij}$ 时，证明这个矩阵是厄米特的。

4.6.3 证明非对称的实数矩阵不能用正交相似变换进行对角化。

提示：假设非对称矩阵能对角化而得出矛盾的结果。

4.6.4 表示角动量 j_x，j_y，j_z 的矩阵都是厄米特的。试证明 j^2 的本征值是实数，而且不是负的，但 $j^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$。

4.6.5 某特定厄米特矩阵的平方为单位矩阵。证明起初的厄米特矩阵的本征值皆为±1。注意：泡里矩阵和狄拉克矩阵是特殊的例子。

4.6.6 正方矩阵其行列式为零时，叫做不是正则的。

(a) 如果 A 不是正则的，证明至少存在一个满足

$$Ar = 0$$

的不为零的列矢量 r。

(b) 如果存在不为零的矢量 r，并满足

$$Ar = 0$$

时，证明 A 不是正则的。

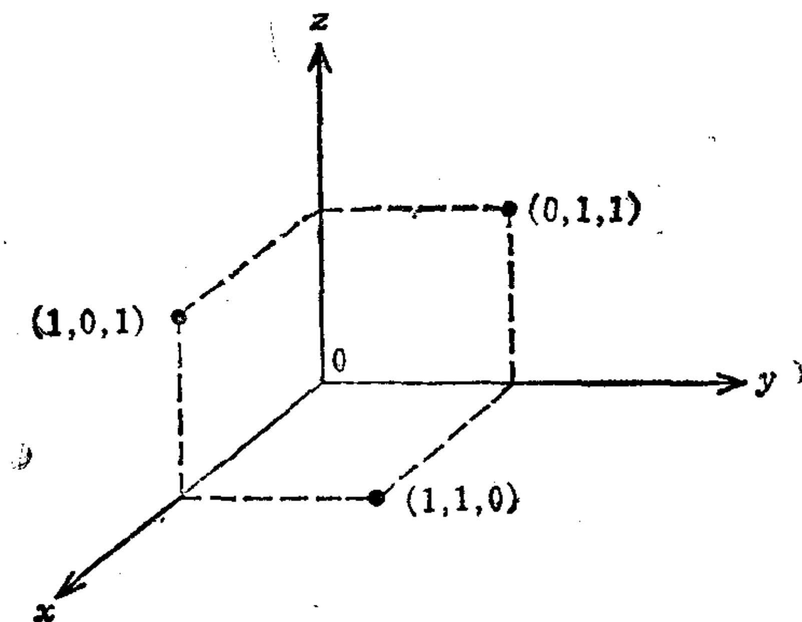
4.6.7 某相同的相似变换将两个矩阵分别对角化。证明起初两个矩阵必须是可对易的（这是量子力学的矩阵（海森堡）表示中，颇为重要）。

4.6.8 两个厄米特矩阵 A 和 B 有相同的本征值。证明 A 和 B 能用某么正相似变换联系起来。

4.6.9 对习题4.2.14的矩阵，求本征值和本征矢的规格正交系。

4.6.10 证明处于 (x, y, z) 质量为 m 的单粒子的转动惯量矩阵的行列式为零。用某矩阵的行列式在相似变换下不变（习题4.2.14）以及坐标系的旋转说明之。

4.6.11 某刚体可用三个质点来表示



$(1,\ 1,\ -2)\qquad m_1=1$

$(-1,\ -1,\ 0)\qquad m_2=2$

$(1,\ 1,\ 2)\qquad m_3=1$

(a) 求转动惯量矩阵

(b) 将其对角化，求出本征值和主轴（作为规格正交本征矢）。

4.6.12 单位质量按图示排列。

(a) 求转动惯量矩阵。

(b) 求本征值和规格正交化本征矢的组合。

(c) 用系统的对称性来说明简并。

答 $I=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ -1 & 4 & -1\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\lambda_1=2\\ \boldsymbol{r}_1=(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})\\ \lambda_2=\lambda_3=5.\end{matrix}$

4.6.13 单位质量处于正方体（±1，±1，±1）的8个顶角．求转动惯量矩阵。证明简并度为3．这意味着，对转动惯量来讲，正方体结构意味着代表球对称性。

4.6.14 求对应下列矩阵的本征值，规格正交本征矢（注意在数值验算里，本征值之和等于起初矩阵的对角元素之和——习题4.3.8）。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=0,1,2$

4.6.15

$$A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=-1,0,2$

4.6.16

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=-1,1,2$

4.6.17

$$A=\begin{pmatrix}1&\sqrt{8}&0\\\sqrt{8}&1&\sqrt{8}\\0&\sqrt{8}&1\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=-3,1,5$

4.6.18

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=0,1,2$

4.6.19

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=-1,1,2$

4.6.20

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=-\sqrt{2},0,\sqrt{2}$

4.6.21

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=0,2,2$

4.6.22

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=-1,-1,2$

4.6.23

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=-1,2,2$

4.6.24

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=0,0,3$

4.6.25

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=1,1,6$

4.6.26

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=0,0,2$

4.6.27

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & \sqrt{3}\\ 0 & 3 & 0\\ \sqrt{3} & 0 & 3\end{pmatrix}$$

答 $\lambda=2,3,6$

4.6.28 是习题4.5.9的继续，么正矩阵$\boldsymbol{U}$和厄米特矩阵$\boldsymbol{H}$由下式联系起来

$$\boldsymbol{U}=e^{iaH}$$

(a) 如果 trace$H=0$时，证明 det $\boldsymbol{U}=+1$。

(b) 如果 det$U=+1$时，证明 trace$H=0$。

提示：H可用某相似变换对角化，指数可解释为麦克劳林展开，$\boldsymbol{U}$也是能对角化的。对应本征值由$u_j=\exp(iah_j)$确定。

注意：这些性质和习题4.5.9对发展群论里的生成元概念是重要的。

4.6.29 (a) 假设某么正矩阵满足本征值方程$\boldsymbol{Ur}=\lambda\boldsymbol{r}$时，证明么正矩阵的本征值具有单位大小。这也可称为正交矩阵。

(b) 假定$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$是属于么正矩阵的两个不同的本征值的本征矢时，证明本征矢在下列意义下是正交的

$$\boldsymbol{r}_1^{+}\boldsymbol{r}_2=0。$$

4.6.30 某一不是厄米特的矩阵A，具有本征值λ_i和属于它的本征矢$\boldsymbol{u}_i$。转置共轭矩阵A^{+}虽具有相同本征值的

集合，但属于它的本征矢 v_i 是不同的。证明本征函数在下列意义下作成双正交系

$$[v_i^*]\{u_j\}=0$$

但 $\lambda_i^* \neq \lambda_j$。

4.6.31 证明所有 2×2 矩阵具有对应于两个本征值的本征矢。本征矢不必是正交的，本征值也不一定必须是实数。

4.6.32 作为习题 4.6.31 的例证

试求和 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

的本征值相对应的本征矢。

注意：本征矢不是正交的。

答 $\lambda_1=0$，$r_1=(2,-1)$。
$\lambda_2=4$，$r_2=(2,1)$。

4.6.33 假设某矩阵是满足条件

$$P^2=P$$

的投影算符，证明对应于两边的本征值 $(\rho^2)_\lambda$ 和 ρ_λ 满足下列关系

$$(\rho^2)_\lambda=(\rho_\lambda)^2=\rho_\lambda$$

这意味着 P 的矩阵的本征值为 0 或 1。

4.7 群论的引入

有限群理论本来是作为纯数学的一个领域而发展的，它不过是优美迷人的玩具而已。对物理学者来说，群论在不丧失其优美的前提下，使半直观的概念公式化以及处理对称性是非常有效的工具。群论随着晶体学和固体物理学的发展成为有效的工具。我们从引入特殊表示(矩阵)并计算群的指标(矩阵的迹)开始，但详细的引入放在 4.8 节。恐怕在物

理学里更重要的是把群论推广到连续群[1]或把这些连续群应用到量子力学及高能物理学。这是4.9～4.11节的主题。

在本世纪开始的四分之三，物理学知识急剧增加。维格纳和其他人，为理解新现象发展相应的理论时，认识到"不变性"是重要概念。处理不变性和对称性的数学手段是群论。这导致了如奇偶性或角动量等那些被物理学者广泛应用的原理的统一和公式化。角动量守恒是旋转对称性的结果。这意味着在空间旋转下的不变性。群论的形式技巧不一定是必要的，但这些强有力的数学手段却省去不少麻烦。群论（一旦理解以后）能引进更多的简化进而看到统一性。

群的定义 群G作为事物或操作的集合来定义。它的元的结合即相乘，给出可明确定义的乘积，并满足以下四个条件。设元的集合为$a, b, c \cdots$。

1. 如果a, b是任意两个元，乘积ab仍是该集合的元。
2. 这样定义的乘积满足结合律

   $(ab)\,c = a\,(bc)$.
3. 存在单位元I，对集合的各元$Ia = aI = a$[2]

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

4. 必定存在各元的逆。集合包含元$b = a^{-1}$，并满足$aa^{-1} = a^{-1}a = I$。在物理学里，这些抽象条件经常利用矢量或旋量或张量的变换赋以直接的物理意义。

---

[1] 这些是有无限个元的群。各元决定于一个或更多的连续变化的参数。

[2] 根据维格纳，群的单位元，经常写成E。这是来自德语的单位Einheit。

作为非常简单且有意义的群的例子，我们来考虑集合 $1,a,b,c$。各元按着表示群的乘法规则的群表❶而结合起来。

这些群的元用

$$1\to 1,\ a\to i,\ b\to -1,\ c\to -i \tag{4.183}$$

表示，利用通常的乘法结合起来。很明显满足群的四个条件，这4个元作成群。群的元的乘法运算是可交换的话，则该群称为可换群或阿贝尔群。我们的群还是循环群，元可按次序写成一个元的幂 i^n，$n=0,1,2,3$。要注意写成(4.183)是因为我们选定这四者的群的特定表示。

这个群的元 1，i，-1，$-i$ 可解释为在复数平面上重复进行90°的旋转。于是根据（4.63）作成4个 2×2 矩阵的集合

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{4.184}$$

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

这四个矩阵的集合形成了结合规则由矩阵的乘积所确定的群。即这里存在着利用矩阵的第2表示。取矩阵的乘积，可以看出这个表示也是阿贝尔的循环的。以上两个表示之间有如下的对应

$$1\leftrightarrow 1\leftrightarrow I\quad a\leftrightarrow i\leftrightarrow A\quad b\leftrightarrow -i\leftrightarrow B\quad c\leftrightarrow -i\leftrightarrow C \tag{4.185}$$

同构，同态 如果在两个群的元之间（或两个表示之间）的对应是1对1的，各个元的集合满足相同的群表时，这

❶因子的次序是从行到列 j，$al=c$ 可用上例表示。

些群称为同构的[1]。如果对应是2对1（或多数对1）但乘法关系仍保留时，群称为同态的。在现在考察的例子里，在两个表示（$1, i, -1, -i$）和（I, A, B, C）之间是同构的。经常是可能的但并无意义的表示（1，1，1，1）是同态的。群O_3^+和$SU(2)$之间最重要的同态对应在4.9节进行讨论。对照起来，其它四者的群，四元群（习题）和上述群之间并没有这种对应，这是要弄清的。须注意4元群是阿贝尔群但不是循环群。

矩阵表示——可约和既约　用矩阵表示群的元是强而有力的技巧，物理学者几乎普遍采用。矩阵的使用不受任何限制。任何有限群的元或4.9节的连续群，都可能用矩阵特别是么正矩阵来表示。在量子力学里这种么正表示具有特殊的重要性。这是因为么正矩阵可以对角化，而本征值对量子状态的区分很有用。

若存在某么正变换，将原来的矩阵么正变换后成为对角形或方块对角形时（例如把

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{11} & q_{12} \\ 0 & 0 & q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \qquad (4.186)$$

分解为更小的子矩阵，不相互结合在一起），就把原来的矩阵叫做可约的。同样情形可写成

$$SRS^{-1} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \qquad (4.187)$$

若假设R为$n\times n$矩阵时，P为$m\times m$矩阵，则Q成为$(n-m)$

---

[1] 一个群的元命名为g_i，第2个群的元命名为h_i，假定对所有变量有所谓$g_i \leftrightarrow h_i$的1对1对应，再设$g_i g_j = g_k$及$h_i h_j = h_k$则g_k和h_k必须是相互对应的元。

$\times(n-m)$矩阵。O为$m\times(n-m)$和$(n-m)\times m$所有元素都是零的矩阵，这一结果写成

$$R=P\oplus Q \tag{4.188}$$

叫做R简约为P和Q。例如阿贝尔群比一维更高维的所有表示是可约的。如果不存在这样的么正矩阵时，就叫做表示是既约的。表4.1的狄拉克矩阵当中，I、σ_1、σ_2、σ_3，δ_1、δ_2、δ_3是这种简约形式。习题4.7.1的课题表示矩阵I、A、B、C作成可约表示，再把它们进一步简约为既约表示。

既约表示在群论里起的作用差不多和矢量分析的基矢相类似。既约表示是最简洁的表示，其它所有表示都可由它作成。

指　标　在4.3节，已看到实数矩阵当进行坐标旋转时可用正交相似变换进行变换.根据基准系的选择,本质上相同的矩阵可采取无限个不同形式。同样，当我们利用么正变换时群的表示也会有无限个不同的形式，但变换后的表示都和原来的同构。根据习题4.3.8，各元（在我们的表示里是各矩阵）的迹在么正变换下是不变的，因是不变的，矩阵的迹（改称指标），在群论里起着重要作用，尤其是应用于固体物理时是如此。

子　群　群的元的子集合(包含单位元)，由它们又组成满足群的四个条件的群是屡见不鲜的。把这样的子集合叫做子群.前面考察的4元群的元1和b作成子群.在4.9节里讨论O_3^+，可是它是通常空间里所有旋转的连续群.围绕任意一个轴的旋转作成O_3^+的子群。在下节里会出现很多其它子群的例子。

在某种情形下，用整个群的所有的元g将子群的各元x进行相似变换后又得到这个子群的元y。

$$y=gxg^{-1} \tag{4.189}$$

这样的子群叫做不变子群，和原子或原子核谱的多重项，以及4.11节里讨论的粒子有关。阿贝尔群的所有子群自动不变。

习　题

4.7.1 证明（4.184）的矩阵I，A，B，C是可约的，并简约之。

注意：意味着将A和C变换成对角形（用相同么正变换）

4.7.2 对晶格的可能操作当中，包含A_π（角度π的旋转），m（镜象映射）以及i（反演）等．这三个操作有如下关系。证明群（1，A_π，$m \cdot i$）和四元群是同构的

$$A_\pi^2 = m^2 = i^2 = 1,$$

$$A_\pi \cdot m = i, \quad m \cdot i = A_\pi, \quad i \cdot A_\pi = m$$

4.7.3 xy平面上四个可能操作是

1．无变化 $\begin{cases} x \to x \\ y \to y \end{cases}$

2．反演 $\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$

3．镜象映射 $\begin{cases} x \to -x \\ y \to y \end{cases}$

4．镜象映射 $\begin{cases} x \to x \\ y \to -y \end{cases}$

(a) 证明这四个操作作成群。

(b) 证明这个群和四元群是同构的。

(c) 作出2×2矩阵表示。

4.7.4 再排列定理

若给定 n 个不同元素 (I, a, b, $c\cdots n$) 的群，证明乘积的集合 (aI, a^2, ab, ac, $\cdots an$) 是按 n 个新的次序将元进行再排列。

4.8 点 群

在物理学里，群的设置一般不改变系统，亦即作为保持不变性的集合而出现。这是对称性的一种表示方式。事实上，对称性的定义就是对一个群的变换来讲系统的哈密顿保持不变。这种意义的对称性在经典力学里是重要的，在量子力学里是更重要的，而且更加有意义。在这一节里研究对象的集合的对称性质，对 4.7 节群的概念进一步加以说明，直接引向2面体群。2面体群将逐次解释在晶体学或固体物理里重要的 32 个点群和 230 个空间群。对称性概念和群论所以能进入物理学是因为通过对晶体的研究而引起的，很值得注意。

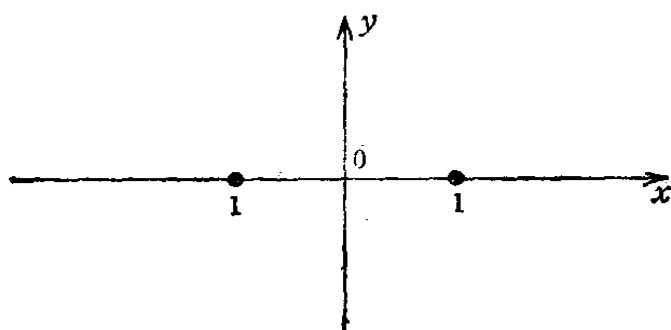


图 4.6 2原子分子H_2，N_2，O_2，C_2等

2体——2 次对称轴 考虑如图 4.6 所示在 xy 平面上的 (1,0) 和 (−1,0) 处存在两个相同原子的二维系统。要使这个系统保持不变须进行怎样的旋转呢。第一个可能是单位操作1。围绕 z 轴进行π弧度的旋转就够了。这种两个元(1, −1) 的群并不是有意思的群，把 z 轴叫做2次对称轴，它对应于使系统不变的两次旋转角0。

到三维情况就成为更有趣的系统。如图 4.7 所示，想象

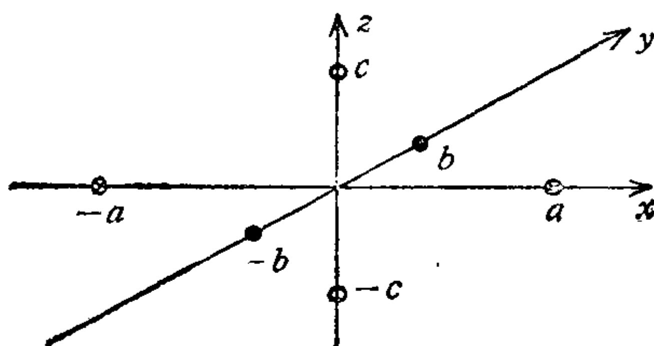


图 4.7 D_2对称

在x轴的$\pm a$处存在X原子，在y轴的$\pm b$处存在Y原子，在z轴的$\pm c$处存在Z原子的分子（或晶体的一部分） 很明显各轴是2次对称轴．用$R_x(\pi)$表示x轴周围的π弧度的旋转时，和4.3节相同，得出旋转的矩阵表示

$$R_x(\pi)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\qquad R_y(\pi)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\tag{4.190}$$

$$R_z(\pi)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

这四个元〔$I, R_x(\pi), R_y(\pi), R_z(\pi)$〕形成阿贝尔群，群表如下：

	I	$R_x(\pi)$	$R_y(\pi)$	$R_z(\pi)$
I	I	R_x	R_y	R_z
$R_x(\pi)$	R_x	I	R_z	R_y
$R_y(\pi)$	R_y	R_z	I	R_x
$R_z(\pi)$	R_z	R_y	R_x	I

和习题4.2.7，4.7.2，4.7.3相比较时，立刻明白这个群是四元群。

(4.190)的矩阵和习题4.2.7是同构的。它们是对角矩阵，很明显是可约的。子群为 (I,R_x)，(I,R_y)，(I,R_z) 因而是不变的。继续进行围绕 y 轴的旋转 π，和围绕 z 轴的旋转 π 等于围绕 x 轴的旋转 π，$R_z(\pi)R_y(\pi)=R_x(\pi)$。用对称性的语言来讲，如果 y 和 z 是2次对称轴，则 x 自动地成为2次对称轴。

这个对称群，四元群经常叫做 D_2。D 意味着2面体群，下标2表示2次的对称轴（不包含更高的对称轴）。

3体——3次对称轴　考虑处于正三角形顶点的三个相同原子，看图4.8

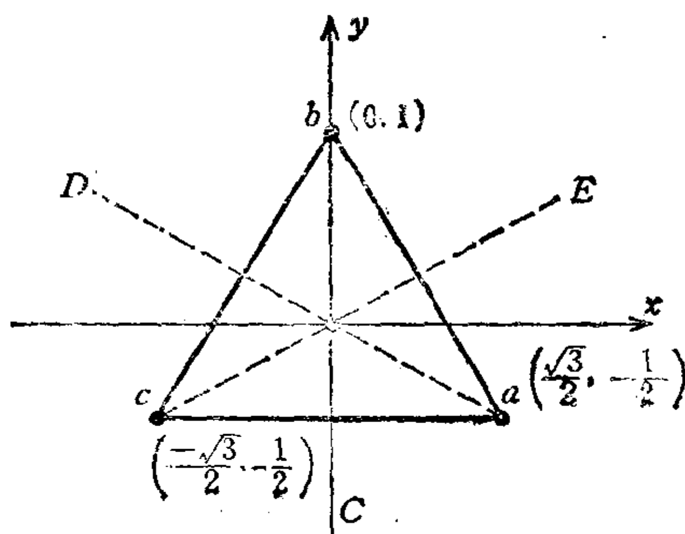


图 4.8　正三角形的对称操作

在行列式❶里

$$I=R_z(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

❶这里要注意是将三角形对固定坐标沿逆时针方向旋转。

$$A = R_z(2\pi/3) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = R_z(4\pi/3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (4.191)$$

z 轴是 3 次对称轴．(I, A, B) 作成循环群，是完全6元的群的子群。

在 xy 平面上尚有 3个附加的对称轴，各原子（顶点）和通过几何中心的轴确定以后，则各轴有 2 次对称性。这些旋转，在 2 维范围以内，引入镜象映射时也许很容易说明。C 也就是围绕 y 轴旋转 π 意味着用 a 来置换 c，正好成为 x 轴的镜象映射

$$C = R_C(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.192)$$

围绕 D 轴的旋转，可以用连续围绕 z 轴 $4\pi/3$ 的旋转和 x 轴的镜象映射（$x \to -x$）来置换。

$$\begin{aligned} D = R_D(\pi) &= CB \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (4.193)$$

同理，围绕 E 轴旋转 π 交换 a 和 b，可用 $2\pi/3(A)$和 x 轴的镜象映射（$x \to -x$）[1]来置换。

[1] 这些镜象映射结果，要注意$\det(C) = \det(D) = \det(E) = -1$，$A$和$B$的旋转当然行列式为$+1$。

$$E=R_B(\pi)=CA$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix} \qquad (4.194)$$
$$=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

完整的群表为

	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	D	E	C
B	B	I	A	E	C	D
C	C	E	D	I	B	A
D	D	C	E	A	I	B
E	E	D	C	B	A	I

我们作出了6元群和它的2×2既约矩阵表示。另一个6元群是循环群$[I,\ R,\ R^2,\ R^3,\ R^4,\ R^5]$

$$R=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad (4.195)$$

在晶体学里我们把群$[I, A, B, C, D, E]$叫做D_3。是具有3次对称轴的2面体群。三个轴（C，D，E）在xy平面上自动地成为2次对称轴。由此（I，C），（I，D），（I，E）成为所有的2元子群，这些D_3当中的2元子群都不是不变的。

其他正三角形的对称群的既约表示有两个：

i）所谓（1，1，1，1，1，1）是毫无意义的。

ii) 仍是几乎没有什么意义的（1，1，1，-1，-1，-1），正的符号对应普通的旋转，负的符号对应于旋转和镜象映射，这两个表示分别和D_3是同态的.

对于具有h个元的有限群普遍的一个结果是

$$\sum_i n_i^2 = h \tag{4.196}$$

n_i为第i个既约表示矩阵的次数，对前三个表示为$1^2+1^2+2^2=6$。

2面体群D_n　具有n次对称轴的2面体群，意味着角度相差$2\pi/n$弧度的n个轴。n为正整数，再无其它限制。如果和晶格的对称性相对照时，则n只限于1，2，4，6. 垂直于n次轴的平面上要求晶格的平移不变性时，$n=5$，7以及更大的数值就不在内。用正五角形把平面完全盖上，使之看起来不重叠。对各个分子来讲，这个约束虽不存在，但$n>6$时例子很少见，$n=5$实际上是可能的。例如图4.9的二茂（络）钌$(C_5H_5)_2Ru$的对称群是$D_5$❶。

晶体学的点群和空间群　现在考察过的2面体群是晶体学的点群的例子。点群乃是用保持晶格不变的旋转和镜象映射（包括反演）的组合来构成的. 操作只限于旋转和镜象映射（包括反演），意味着固定一点（原点）. 包

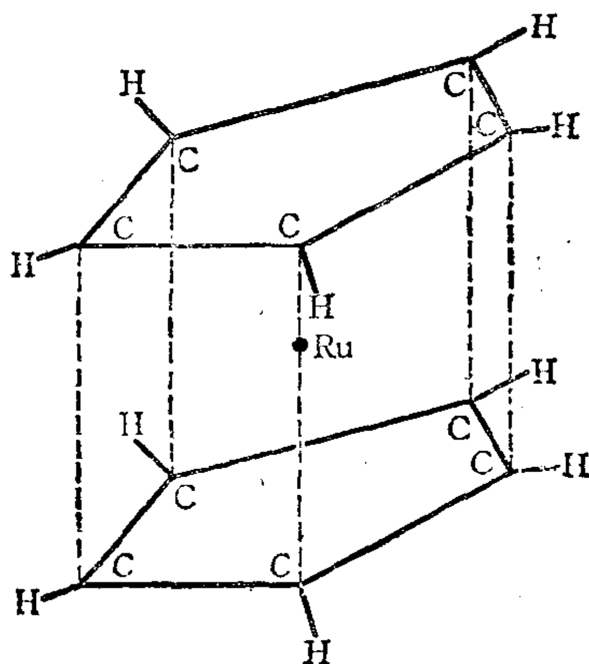


图 4.9　二茂（络）钌
(Ruthenocene)

❶实际上完整的名称是D_{5h}，h表示在5次轴的镜象映射下是不变的.

含循环群，两个正方群（正四面体及正八面体的对称性）和镜象映射的组合在内整个形成32个点群。

在构成点群的旋转和镜象操作以外，如果加上平行移动的可能性，并要求晶格不变时，就成为空间群。共存在230个不同的空间群，除了专家以外是一个可怕的数字。详细请看有关参考文献。

习　题

4.8.1 证明D_3的子群（I，A，B）是不变子群。

4.8.2 群D_3也可以作为三体置换群来讨论。例如矩阵B将a旋转到b，将b旋转到c，将c旋转到a，用三维表示的话

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\c\\a\end{pmatrix}.$$

(a) 试作出D_3的其他元与此类似的3×3表示。

(b) 把现在的3×3表示简约为这一节所处理的2×2表示。

注意：可约表示的实际简约是相当麻烦的。经常用必要的次数直接作出新的表示较为容易。

4.8.3 二面体群D_n的元可写成

$$S^{\lambda}R_z^{\mu}\quad \lambda=0,1$$
$$\mu=0,1,\cdots n-1$$

的形式。R_z（$2\pi/n$）代表围绕n次对称轴$2\pi/n$的旋转。S代表围绕通过正多角形的中心与一个顶点的轴的旋转。

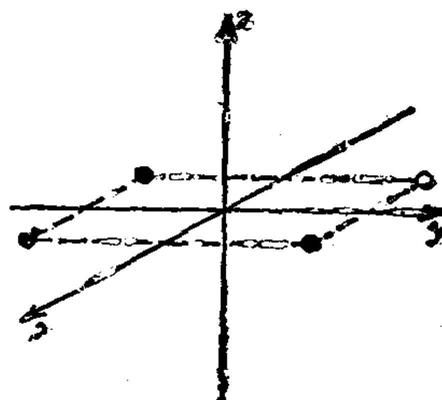
对$S=E$，证明这个形式描述的是D_3的矩阵A,B,C。

4.8.4 试说明下列关系式

$$\sum_i n_i^2 = h$$

和四元群（$h=4$）怎样对照起来。

4.8.5 试作出将正方形变换到它本身的操作（旋转和镜象映射）的群的2×2矩阵既约表示。注意：这是正方形的对称群，也是2面体群D_4。



4.8.6 4体的置换群含有$4!=24$个元。根据习题4.8.5，正方形的对称群D_4的元数目比24小得多。试说明D_4和4体置换群的关系。

4.8.7 在简单立方晶格里，相同原子在$r=(la, ma\ na)$。l，m，n皆取整数。

(a) 证明各直角坐标轴是4次对称轴。

(b) 立方群包含保持简单立方晶格不变的所有操作(旋转，镜象映射及反演)。考虑正负坐标轴，试分析这个立方群有几个元。

4.9 连续群

无限群，李群　前两节所有的群都包含有限个元；4元群为4，D_3为6等等。这里引入具有无限个元的群。这个群的元含有在某一范围内连续变化的一个或更多的参数。连续变化的参数使群的元产生连续性。和4元循环群（1，i，-1，$-i$）相比较时，我们得到的元为$e^{i\phi}$，ϕ在$[0, 2\pi]$的范围内连续变化。下面讨论的O_3^+，SU（2）群就是它的例子。

在许多数学可能性当中，以李群而闻名的连续群是特别有趣的。李群的特征是乘积的元的参数是原来因子的参数的解析函数❶。

❶所谓解析意味着存在任意阶的导数。

在变换时，比如旋转可写成下式（参考1.9式）

$$x_i' = f_i\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ \theta) \qquad (4.197)$$

要使这个群是李群，函数f_i必须是参数θ的解析函数。这对于这一节，4.10节所讨论的O_3^+群和SU（2），出现于4 11节的SU（3），4 12节的洛仑兹群都是对的，都是李群。根据函数的解析性质（微分可能性）为研究固定元附近的元，而产生所谓生成元的概念，就没有必要再去研究群的整体。如果这些参数在闭区间，比如对角度来讲是在[0，π]或[0,2π]之间变化的话，称为群[illegible]紧致的[illegible]这个重要性质表明某紧致的群的任何[illegible]示[illegible]么正[illegible]示[illegible]相[illegible]的[illegible]比之下，4 12节的齐次洛仑兹群不[illegible]紧致的，[illegible]以表示[illegible]）不[illegible]么正的。

正交群，O_3^+ $n\times n$ 实正交矩阵的集合作成群（明确4 7节当中是满足群的性质的）。$n\times n$ 矩阵有$n(n-1)/$ 个独立参数。对 $n=2$ 有唯一的独立参数，乃是(4.63) 的一个角度。对 $n=3$ 有 3 个独立参数，即 4.3 节的三个欧拉角。

在3×3 实正交矩阵里，把行列式为+1的集合再仔细分析一下。这里只包含旋转而不包含镜象映射。这个群经常称为O_3^+，+代表行列式为+1。围绕坐标轴的旋转，按照4.3节的规定，由

$$R_x(\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},\quad R_y(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$R_z(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (4.198)$$

确定。对新方向来讲旋转是将坐标系逆时针转动，再根据4.3节，O_3^+ 的普遍化的元为欧拉角的旋转。

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha)$$

(4.199)

O_3^+ 和轨道角动量的关系在 4.10 节确定。O_3^+ 在 4.11 节也出现，并引向 $SU(3)$ 和基本粒子物理学。

特殊么正群，$SU(2)$　$n\times n$ 么正矩阵的集合仍作成群（再一次明确是满足群的性质的）。这个群经常叫做$U(n)$。对此加上附加条件，即矩阵的行列式为 +1 时，则得到特殊么正群或么正么模群 $SU(n)$。么正的即行列式为 +1 的矩阵，有 n^2-1个独立参数、对 $n=2$存在3个参数，这和O_3^+数目相同。对 $n=3$ 有 8 个参数，这就成为 4.11 节的八道说。

对$n=2$是有一般的元

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{4.200}$$

的群$SU(2)$。其中$a^*a+b^*b=1$。这些参数叫做凯利·克莱因参数，为了处理力学问题由凯利·克莱因引进的。它的普遍形式利用三个实数参数ξ，η，ζ为

$$U(\xi,\eta,\zeta)=\begin{pmatrix} e^{i\zeta}\cos\eta & e^{i\zeta}\sin\eta \\ -e^{-i\zeta}\sin\eta & e^{-i\zeta}\cos\eta \end{pmatrix} \tag{4.201}$$

再来确定$SU(2)$的既约表示。回到（4.200），U 乃是描述 2 分量复数列矢量（叫做旋量）的变换

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{4.202}$$

即

$$u'=au+bv,$$

$$v'=-b^*u+a^*v. \tag{4.203}$$

从这个结果的形式看来，如果就 u 和 v 的 n 次齐次多项式出发，进行么正变换(4.203)时，再一次得到n次的齐次多项式。这意味着u^n，$u^{n-1}v$，$u^{n-2}v^2$，等的$n+1$项属于特殊么

正群的$n+1$维表示。

为避免留下代数上的含糊之处，我们按着维格纳的做法，在$n=2$的情况下（单项式的）把函数取成

$$f_m(u,v)=\frac{u^{j+m}v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \tag{4.204}$$

分母为规格化因子，使表示成为么正的。如果用U作用于$f_m(u,v)$成为

$$Uf_m(u,v)=f_m(u',v') \tag{4.205}$$

时，$Uf_m(u,v)=f_m(au+bv,-b^*u+a^*v)$

$$=\frac{(au+bv)^{j+m}(-b^*u+a^*v)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}. \tag{4.206}$$

这里要做的是将（4.206）的右边用具有f_m（u，v）的形式的项的线性组合来表示。给出求解线性组合系数的表示。根据二项式定理，有

$$(au+bv)^{j+m}=\sum_{k=0}^{j+m}\frac{(j+m)!}{k!(j+m-k)!}a^{j+m-k}u^{j+m-k}b^kv^k$$

$$(-b^*u+a^*v)^{j-m}=\sum_{l=0}^{j-m}(-1)^{j-m-l} \tag{4.207}$$

$$\times\frac{(j-m)!}{l!(j-m-l)!}b^{*(j-m-l)}u^{(j-m-l)}a^{*l}v^l$$

所以

$$Uf_m(u,v)=\sum_{k=0}^{j+m}\sum_{l=0}^{j-m}(-1)^{j-m-l}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{k!l!(j+m-k)!(j-m-l)!}$$

$$\times a^{j+m-k}a^{*l}b^kb^{*(j-m-l)}u^{(2j-k-l)}v^{k+l} \tag{4.208}$$

如果设$j-k-l=m'$时

$$u^{2j-k-l}v^{k+l}\to u^{j+m'}v^{j-m'} \tag{4.209}$$

和（4.204）的形式相符合。用m'求和来置换l求和。

$$Uf^m(u,v)=\sum_{m'=-j}^{j}U_{mm'}f_{m'}(u,v) \qquad (4.210)$$

其中矩阵元 U_{mm} 为

$$U_{mm}=\sum_{k=0}^{j+m}(-1)^{m'-m+k}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-m'-k)!(j+m-k)!(m'-m+k)!}$$

$$\times a^{(j+m-k)}a^{*\,j-m'-k}b^k b^{*\,m'-m+k} \qquad (4.211)$$

下标k从 O 到 $j+m$，分母的阶乘●要保证如果哪个幂指数为负，则系数为0。

(4.210) 表明，$U_{mm'}$对 $f_{m'}$ 的操作（m' 的和）和用U作用于f_m 是相同的。这种对应就有同构性的基础，我们把矩阵$U_{mm'}$看成和SU（2）的表示相同。m和m'分别从 $-j$ 到 $+j$ 一个个变化，所以矩阵$U_{mm'}$是（$2j+1$）×（$2j+1$）维的。

稍有一点是特殊的，若让$j=\frac{1}{2}$时

$$m'=\frac{1}{2} \qquad\qquad m'=-\frac{1}{2}$$

$$U=\begin{matrix} m=\frac{1}{2} \\ \\ m=-\frac{1}{2}\end{matrix}\begin{pmatrix} a & b \\ \\ -b^* & a^*\end{pmatrix} \qquad (4.212)$$

和（4 200）相等。$j=1$或这以上的情形，用三角函数来处理最为方便，下面就来讨论这些问题。

SU（2）——O_3^+的同构性　很明显实正交群O_3^+是描述通常三维空间当中的旋转。自然它具有保持 $x^2+y^2+z^2$不变的特征。

SU（2）对某矩阵的作用，由么正变换（4.122）

●根据（$-n$）$!=\pm\infty$，但$n=1$，2，3…

$$M' = UMU^+ \tag{4.213}$$

来确定。取M为2×2矩阵，须注意任何2×2矩阵都可写成单位矩阵和4.2节的3个泡里矩阵的线性组合。让M为矩阵的迹特征值为0的矩阵

$$M = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}. \tag{4.214}$$

单位矩阵未在里边。在么正变换下矩阵的迹不变（习题4.3.9），所以M'采取相同形式

$$M' = x'\sigma_1 + y'\sigma_2 + z'\sigma_3 = \begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix} \tag{4.215}$$

行列式在么正变换下也是不变的（习题4.3.13），于是，有

$$-(x^2+y^2+z^2) = -(x'^2+y'^2+z'^2) \tag{4.216}$$

即在$SU(2)$操作下$x^2+y^2+z^2$是不变的和O_3^+的情形一样。因此$SU(2)$也是描述旋转的。这暗示着$SU(2)$和O_3^+是同构的或同态的。

$SU(2)$是描述什么样的旋转呢？我们就一个特殊情况来研究这个问题。回到(4.200)，另一方面也参考(4.201)，设$a=e^{i\xi}$，$b=0$即

$$U_z = \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix} \tag{4.217}$$

对3个泡里矩阵分别进行么正变换，

$$U_z\sigma_1 U_z^+ = \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\xi} \\ e^{-2i\xi} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.218}$$

再用泡里矩阵表示之，得

$$U_z x\sigma_1 U_z^+ = x\cos 2\xi\sigma_1 - x\sin 2\xi\sigma_2 \tag{4.219}$$

同理

$$U_z y\sigma_2 U_z^+ = y\sin 2\xi\sigma_1 + y\cos 2\xi\sigma_2$$

$$U_z z\sigma_3 U_z^+ = z\sigma_3. \tag{4.220}$$

从这些倍角公式可以看出开始从半角$\xi=\alpha/2$出发更为恰当。于是根据（4.213—4.215），（4.219），（4.220）有

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{4.221}$$

利用$U_z(\alpha/2)$的 2×2 么正变换和（4.198）当中的旋转算符 R_z（α）是一样的。我们把确定

$$U_y(\beta/2) = \begin{pmatrix} \cos\beta/2 & \sin\beta/2 \\ -\sin\beta/2 & \cos\beta/2 \end{pmatrix} \tag{4.222}$$

和 $R_y(\beta)$的对应以及

$$U_x(\varphi/2) = \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 & i\sin\varphi/2 \\ i\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 \end{pmatrix} \tag{4.223}$$

和 $R_x(\varphi)$ 的对应留作习题4.9.7.请读者注意 $U_k(\psi/2)$ 具有一般形式

$$U_k(\psi/2) = I\cos\psi/2 + i\sigma_k\sin\psi/2 \tag{4.224}$$

但 $k=x,y,z$。4.10节再来讨论这个问题。

对应

$$U_z(\alpha/2) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\alpha) \tag{4.225}$$

并不是简单的1对1对应。R_z虽有从0到2π的范围，但U_z的参数$\alpha/2$是从0到π变动，于是

$$R_z(\alpha + 2\pi) = R_z(\alpha)$$

$$U_z(a/2+\pi)=\begin{pmatrix}-e^{ia/2} & 0\\ 0 & -e^{-ia/2}\end{pmatrix}=-U_z(a/2) \quad (4.226)$$

所以U_z $(a/2)$ 和U_z $(a/2+\pi)$ $=-U_z$ $(a/2)$ 两者对应于R_z (a) ，对应是2对1，所以$SU(2)$ 和O_3^+ 是同态的.建立$SU(2)$ 的表示和O_3^+ 之间的对应，意味着知道了$SU(2)$● 的表示时就会自动地得到O_3^+的表示。

把若干个旋转组合起来，利用

$$U(a,\ \beta,\ \gamma)=U_z(\gamma/2)U_y(\beta/2)U_z(a/2) \quad (4.227)$$

的幺正变换正是对应一般的欧拉旋转$R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(a)$ 。通过直接相乘，有

$$U(a,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}e^{i\gamma/2} & 0\\ 0 & e^{-i\gamma/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta/2 & \sin\beta/2\\ -\sin\beta/2 & \cos\beta/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{ia/2} & 0\\ 0 & e^{-ia/2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{i(\gamma+a)/2}\cos\beta/2 & e^{i(\gamma-a)/2}\sin\beta/2\\ -e^{-i(\gamma-a)/2}\sin\beta/2 & e^{-i(\gamma+a)/2}\cos\beta/2\end{pmatrix} \quad (4.228)$$

假设 $\xi=(\gamma+a)/2$，$\eta=\beta/2$，$\zeta=(\gamma-a)/2$ (4.229)

则得另一个一般形式（4.201）

根据（4.228）我们可定（4.201）的参数

$$a=e^{i(\gamma+a)/2}\cos\beta/2$$
$$b=e^{i(\gamma-a)/2}\sin\beta/2 \quad (4.230)$$

于是（4.211）的SU（2）的表示变成

$$U_{mm'}(a,\beta,\gamma)=\sum_{k=0}^{j+m}(-1)^k$$

$$\times\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-m'-k)!(j+m-k)!(m'-m+k)!}$$

●对于j取整数值与半整数值（$j=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\cdots$），$SU$（2）虽具有表示，但$O_3^+$却只限于$j$的整数值（$j=0,1,2,\cdots$），这在4.10节还要讨论。

$$\times e^{im\gamma}(\cos\beta/2)^{2j+m-m'-2k}(-\sin\beta/2)^{m'-m+2k}e^{im'\alpha}$$

(4.231)

这是用欧拉角来表示的既约表示。(4.231)的重要性在于对所有的j ($j=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\cdots$)来讲将$SU(2)$的$(2j+1)\times(2j+1)$既约表示对整数的角动量$j$ ($j=0,1,2\cdots$)可能计算出O_3^+的既约表示。

旋转矩阵$D^j(\alpha,\beta,\gamma)$

在量子力学的书里习惯上采取用

$$D^j_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)=U^*_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) \qquad (4.232)$$

定义的$U_{mm'}$的转置共轭矩阵●。对$j=0$

$$D^0(\alpha,\beta,\gamma)=1 \qquad (4.233)$$

对 $j=\frac{1}{2}$ $m=\frac{1}{2}$ $m=-\frac{1}{2}$

$$D^{1/2}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{matrix} m'=\frac{1}{2} \\ \\ m'=-\frac{1}{2}\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\beta/2\, e^{-i\gamma/2} & -e^{-i\alpha}\sin\beta/2\, e^{i\gamma/2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\beta/2\, e^{-i\gamma/2} & e^{i\alpha/2}\cos\beta/2\, e^{i\gamma/2} \end{pmatrix}$$

(4.234)

对$j=1$由(4.231)和(4.232)

$$D'(\alpha,\beta,\gamma)=$$

$m=1$ $\qquad m=0$ $\qquad m=-1$ $\qquad$ (4.235)

●理由是这里用坐标旋转来定义$U_{mm'}$。而$D^j_{mm'}$则用旋转函数。这在4.10节还要讨论。

$$
\begin{array}{l}
m'=1 \\
m'=0 \\
m'=-1
\end{array}
\begin{pmatrix}
e^{-i\alpha}\dfrac{1+\cos\beta}{2}e^{-i\gamma} & -e^{-i\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & e^{-i\alpha}\dfrac{1-\cos\beta}{2}e^{i\gamma} \\
\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}}e^{-i\gamma} & \cos\beta & -\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}}e^{i\gamma} \\
e^{i\alpha}\dfrac{1-\cos\beta}{2}e^{-i\gamma} & e^{i\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & e\dfrac{1+\cos\beta}{2}e^{i\gamma}
\end{pmatrix}.
$$

$j=l$，整数情形，将旋转矩阵 D^l 作用于球谐函数时，可得

$$
Y_l^m\ (\theta',\varphi') = \sum_{m'} D^l_{m'm}\ (\alpha,\beta,o)\ Y_l^m\ (\theta,\varphi) \tag{4.236}
$$

开始的两个欧拉角 α 和 β 如图4.10所示，规定新的极轴 z'' 和方位角的新的零（第三个欧拉角 γ 对应于围绕新的极轴的旋转，所以这里不去讨论它）。

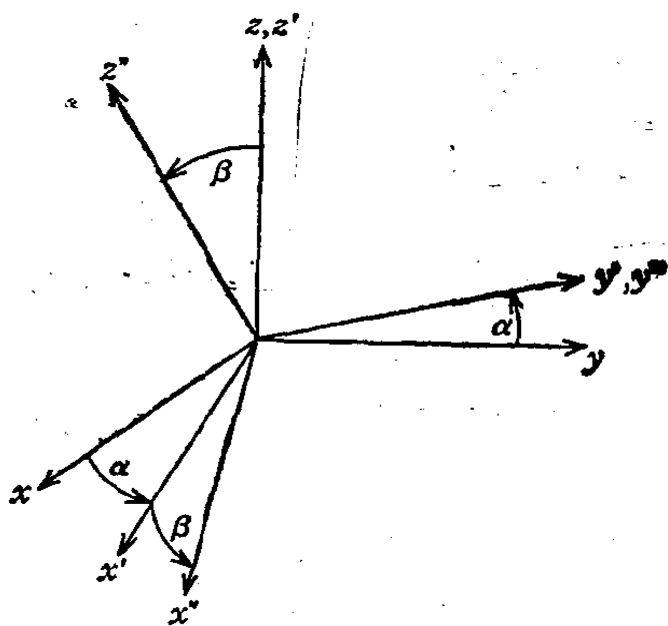


图 4.10 欧拉角的旋转（$\gamma=0$）

点 (θ',φ') 和 (θ,φ) 虽是空间上相同的点，但不是开始的坐标系而是按旋转后的坐标系测得的点。注意和（4.205）

的类似性。球谐函数是x,y,z的l次齐次函数。

旋转矩阵D^j的进一步讨论，就要包括球谐函数的加法定理的证明，请读者参考本章末尾Rose的教科书。

习　题

4.9.1 证明$n\times n$正交矩阵有$n(n-1)/2$个独立参数。

提示：受正交条件（4.60）的限制。

4.9.2 证明$n\times n$特殊么正矩阵有n^2-1个独立参数。

提示：各矩阵元是复数故可能参数的数目变成两倍。有条件式者因是复数式故按两倍的数来数。

4.9.3 特殊线性群SL（2）所有2×2矩阵（有复数元）行列式为$+1$，证明这个矩阵作成群。

注意：SL（2）群能和洛仑兹群建立联系（4.12节），类似于SU（2）群和O_3^+有关。

4.9.4 证明R_z为O_3^+的子群。（或者不是这样）

4.9.5 2×2么正么模矩阵的一般形式为

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

证明$a^*a+b^*b=1$。

4.9.6 用S表示(4.202)的旋量$(u,\ v)$时，证明$S^+S=S'^+S'$即旋量的长度在变换U之下是守恒的。

4.9.7 (a) 证明$U_y(\beta/2)$对应于$R_y(\beta)$。

(b) 证明$U_z(\varphi/2)$对应于$R_z(\varphi)$。

4.9.8 (a) 试证明$D^j(\alpha,\beta,\gamma)$和α与γ的关系可分解为如下各因子

$$D^j(\alpha,\beta,\gamma)=A^j(\alpha)d^j(\beta)C^j(\gamma)$$

(b) 证明$A^j(\alpha)$及$C^j(\gamma)$是对角形的，求出正确形式

提示：参考习题4.2.28及4.2.29

(c) 证明$d^j(\beta)=D^j(0, \beta, 0)$。

4.9.9 分析(4.231)及(4.232)或特例(4.234)，(4.235)，有

$$D^{j+}(\alpha, \beta, \gamma)=D^j(-\gamma, -\beta, -\alpha)$$

试说明之。

4.9.10 (a) 假定$D^j(\alpha, \beta, \gamma)$是么正的证明

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(\theta_1, \varphi_1)\, Y_l^m(\theta_2, \varphi_2)$$

为标量（旋转不变）这是类似于矢量的标量积的函数。

(b) 利用(a)推导球谐函数的加法定理。

$$P_l(\cos\gamma)=4\pi(2l+1)^{-1}\sum_{m=-l} Y_l^{m*}(\theta_1,\varphi_1)Y_l^m(\theta_2,\varphi_2)$$

提示：取$\theta_1=0 \quad (\theta_2=\gamma)$

4.10 生成元

旋转与角动量　两个矩阵U和H由方程

$$U=e^{iaH}=1+iaH+(iaH)^2/2!+\cdots\cdots \quad (4.237)$$

来联系。a为实数参数。(4.237)的右边为麦克劳林展开，给出指数函数的解释。由4.5节如果H是厄米特的则U是么正的。同时如果U是么正的则H是厄米特的。

在群论文献当中，把H叫做U的生成元。旋转群O_3^+和生成元的关系在图4.11中用图解说明。

1. 从图4.11的左侧出发，描述围绕z轴逆时针方向以角度φ进行坐标系的有限旋转的矩阵由(4.76)确定，它是

$$R_z(\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.238)$$

2. 用R_z描述的旋转作为角度$\delta\varphi$的无穷小旋转，于是R_z可写成

$$R_z(\delta\varphi)=1+i\delta\varphi M_z \tag{4.239}$$

但
$$M_z=\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{4.240}$$

和M_z相同，M_x及M_y出现于习题4.2.15，通过微分也可以得到M_z。如果把某矩阵的导数看成导数的矩阵时

$$\mathrm{d}R_z/\mathrm{d}\varphi|_{\varphi=0}=iM_z. \tag{4.241}$$

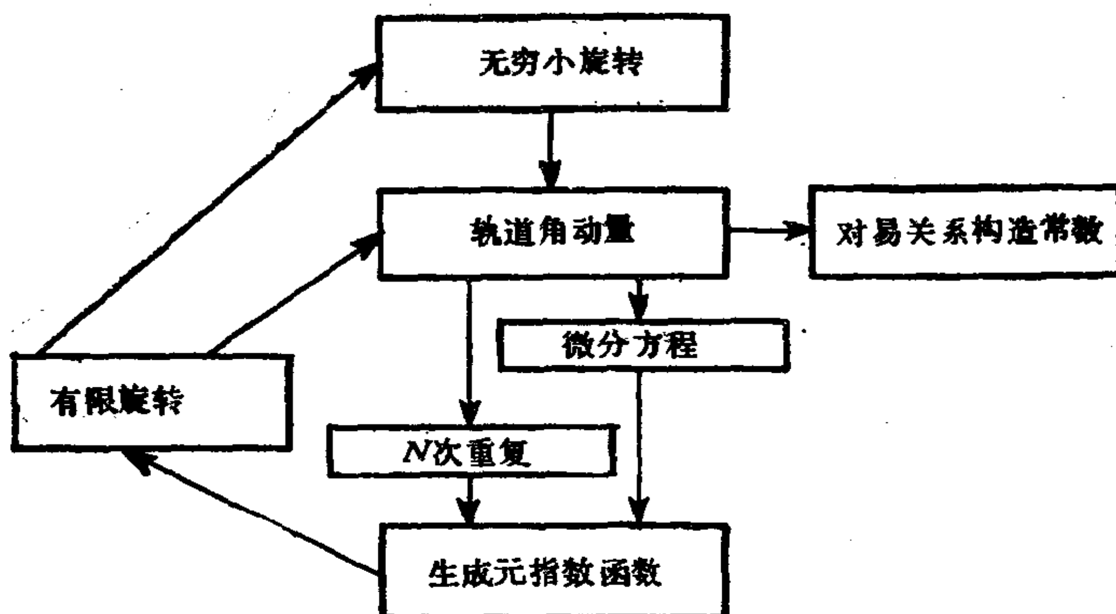


图 4.11 群—生成元的关系

这样看来，(4.239) 不过把R_z的麦克劳林展开的$(\delta\varphi)^2$及其以上的幂去掉而得。(4.241) 的正确性来自李群的可微分性。

3. 有限旋转φ乃是连续的无穷小旋转$\delta\varphi$的合成

$$R_z(\delta\varphi_2+\delta\varphi_1)=(1+i\delta\varphi_2M_z)(1+i\delta\varphi_1M_z) \tag{4.242}$$

对N次旋转，设$\delta\varphi=\dfrac{\varphi}{N}$，$N\to\infty$时

$$R_z(\varphi)=\lim_{N\to\infty}[1+(i\varphi/N)M_z]^N=\exp i\varphi M_z. \tag{4.243}$$

根据这一形式将M_z定义为O_3^+的子群的$R_z(\varphi)$群的生成元即可。实际的$R_z(\varphi)$的做法如下，要注意两个特征。

a。M_z为厄米特的，$R_z(\varphi)$为么正的。

b。$\mathrm{trace}(M_z)=0$及$\det R_z(\varphi)=+1$。

由M_z根据直接的类推，M_x可定义为围绕x轴的旋转的（子）群R_x的生成元。于是M_y生成R_y。

4。如（4.237）所示，指数函数展开后

$$\exp i\varphi M_z=1+i\varphi M_z+(i\varphi M_z)^2/2!+(i\varphi M_z)^3/3!+\cdots\cdots$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\times\{1-\varphi^2/2!+\varphi^4/4!-\cdots\cdots\}+iM_z\{\varphi-\varphi^3/3!+\varphi^5/5!-\}\tag{4.244}$$

在上式第2项利用了

$$M_z^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad M_z^3=M_z\tag{4.245}$$

的关系。如果注意到开始的级数为$\cos\varphi$后面为$\sin\varphi$时，则$R_z(\varphi)$由（4.238）来确定。

5。回到无穷小情况，我们的无穷小旋转是可对易的。

$$[R_x(\delta\varphi_x),R_y(\delta\varphi_y)]=[R_y(\delta\varphi_y),R_z(\delta\varphi_z)]$$

$$=[R_z(\delta\varphi_z),R_x(\delta\varphi_x)]=0\tag{4.246}$$

假设沿某轴方向的单位矢量为$\boldsymbol{n}$，则围绕该轴的无穷小旋转为

$$R^{*}(\delta\varphi) = 1 + i\ (\delta\varphi_x M_x + \delta\varphi_y M_y + \delta\varphi_z M_z)$$
$$= 1 + i\delta\varphi \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{M} \tag{4.247}$$

6。根据习题4.2.15，生成元满足对易关系

$$[M_i,\ M_j] = i\varepsilon_{ijk} M_k \tag{4.248}$$

其中ε_{ijk}是在3.4节规定的，它的整体是反对称列维－契维塔符号。虽包含对k求和，但只有一个不为零的项。M_k的系数ε_{ijk}叫做构造常数。构造常数是作成李群的出发点。上面已经看到因群的生成元决定构造常数，相反构造常数也该决定群吧！

必须注意（4.248）有无穷多个解。习题4.2.15的三个矩阵M_x, M_y, M_z作成一个解，这相当于角动量的一个单位。其它解$(2l+1)\times(2l+1)$矩阵有分量$l = 2, 3, 4\cdots\cdots$，生成旋转群O_3^+的其它既约表示。

函数的旋转 在以上的所有讨论里，矩阵使坐标旋转，而所有被描述的物理系统都是固定的。现在把坐标固定，而使函数ψ（x，y，z）相对于这个固定坐标旋转，会是如何呢？因已用R旋转坐标，故引入使函数旋转的算符$\mathscr{R}$。$\mathscr{R}$的定义如下

$$\mathscr{R}\psi(x,\ y,\ z) = \psi'(x,\ y,\ z) \rightarrow \psi(x') \tag{4.249}$$

但
$$x' = Rx \tag{4.250}$$

用话来说，$\mathscr{R}$作用于函数ψ，使ψ旋转，生成新的ψ'。这个新的函数ψ'和$\psi(x')$的数值一致。x'表示用R旋转坐标。对于围绕z轴旋转的特殊情形

$$\mathscr{R}_z(\psi)\psi(x,\ y,\ z) = \psi(x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi,\ z)。 \tag{4.251}$$

为搞清楚这个式子的意义，考虑$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$的情形

$$\mathscr{R}_z\psi(x, y, z) = \psi(y, -x, z) \tag{4.252}$$

函数 ψ 表示波函数或经典的物理系统。

让 $\psi(x, y, z)$ 当第1个变量变大时跟着变大。于是 $\mathscr{R}_z(\varphi=\pi/2)\ \psi(x, y, z)$ 当 $\psi(y, -x, z)$ 的第1个即 y 变大时跟着变大。$\mathscr{R}_z$ 的效果是将函数 ψ 的图形进行逆时针旋转，这和 R 使坐标系旋转是一样的。如（图4.12）。

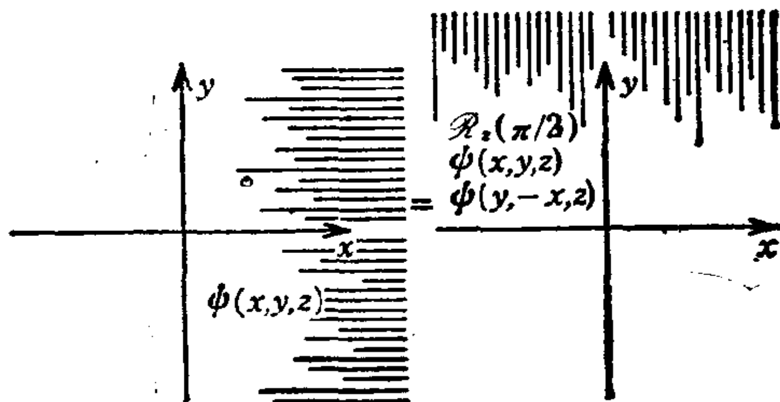


图 4.12　$\psi(x, y, z)$的旋转

回到（4.251），仍考虑无穷小旋转，让 $\varphi\to\delta\varphi$

$$\mathscr{R}_z(\delta\varphi)\psi(x,y,z)=\psi(x+y\delta\varphi, y-x\delta\varphi, z)。\qquad (4.253)$$

将右边展开成泰勒级数

$$\mathscr{R}_z(\delta\varphi)\psi(x,y,z)=\psi\ (x,y,z)-\delta\varphi\left\{x\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\}+O(\delta\varphi)^2$$

$$=(1-i\delta\varphi L_z)\psi(x,y,z)\qquad (4.254)$$

第1行右边的中括弧里的微分形式为 iL_z。另外

$$\mathscr{R}_z(\varphi+\delta\varphi)\psi=\mathscr{R}_z(\delta\varphi)\mathscr{R}_z(\varphi)\psi=(1-i\delta\varphi L_z)\mathscr{R}_z(\varphi)\psi\qquad (4.255)$$

（看成算符的函数）所以

$$\{\mathscr{R}_z(\varphi+\delta\varphi)-\mathscr{R}_z(\varphi)\}/\delta\varphi=-iL_z\mathscr{R}_z(\varphi)\qquad (4.256)$$

左边刚好是$\mathrm{d}\mathscr{R}_z(\varphi)/\mathrm{d}\varphi(\delta\varphi\to 0)$。利用这个形式，将(4.256)直接进行积分后

$$\mathscr{R}_z(\varphi)=\exp(-i\varphi L_z) \tag{4.257}$$

积分常数由边界条件$\mathscr{R}_z(0)=1$确定。

须注意与（4.243）的类似点和不同点，R_z是将坐标旋转，而$\mathscr{R}_z$是将函数旋转，M_z虽是矩阵，但L_z是微分算符。另外L_x，L_y，L_z和M_x，M_y，M_z严格满足相同的对易关系，所以给出相同的构造常数

$$[L_i,\ L_j]=i\varepsilon_{ijk}L_k \tag{4.258}$$

将（4.257）和（4.243）和4.3节的两个方程相比较，会有所启发。在（4.89）里，A使坐标逆时针转动，在（4.93）里，同样的A使矢量顺时针旋转。其中R使坐标逆时针旋转，$\mathscr{R}$也使函数进行逆时针旋转，这就是在（4.257）里出现负指数的结论。

SU（2）与泡里矩阵 二维特殊么正群SU（2）的元由

$$\exp\frac{1}{2}ia\sigma_1,\qquad \exp\frac{1}{2}ib\sigma_2,\qquad \exp\frac{1}{2}ic\sigma_3 \tag{4.259}$$

生成。其中σ_1，σ_2，σ_3是三个泡里自旋矩阵、三个参数a，b，c为实数。须再一次提请注意σ为厄米特的，且矩阵的迹为零，SU（2）的元（4.259）是么正的，行列式为+1。如σ_3具有对角形的生成元会导至量子数守恒。

泡里的σ虽满足对易关系

$$[\sigma_i,\ \sigma_j]=2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{4.260}$$

但这和L与M的对易关系（4.258）与（4.248）分别只相差因子2而已。让$S_i=\frac{1}{2}\sigma_i$，$i=1$，2，3。于是

$$[S_i,\ S_j]=i\varepsilon_{ijk}S_k \tag{4.261}$$

和角动量对易关系[●]严格一致。即σ_i并不是，而S_i才是角动量算符，这是因为在生成元的指数里含有1/2的缘故。这和在4.9节里研究$SU(2)—O_3^+$的同态性时采用半角在本质上是相同的。

将$\exp(ias_1)=\exp(\frac{1}{2}ia\sigma_1)$展开成麦克劳林级数时，有

$$\exp\frac{1}{2}ia\sigma_1=I\{1-(a/2)^2/2!+(a/2)^4/4!-\cdots\cdots\}$$
$$+i\sigma_1\{(a/2)-(a/2)^3/3!+(a/2)^5/5!-\cdots\cdots\}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos a/2 & i\sin a/2\\ i\sin a/2 & \cos a/2\end{pmatrix} \tag{4.262}$$
$$=I\cos a/2+i\sigma_1\sin a/2$$

这是（4.224）的特殊情况、参数a可看成角度，和(4.243)的φ一样是角动量矩阵的系数。但在$SU(2)$里角度经常以半角$a/2$出现，同理

$$\exp\frac{1}{2}ib\sigma_2=\begin{pmatrix}\cos b/2 & \sin b/2\\ -\sin b/2 & \cos b/2\end{pmatrix}=I\cos b/2+i\sigma_2\sin b/2,$$

$$\exp\frac{1}{2}ic\sigma_3=\begin{pmatrix}\exp\frac{1}{2}ic & 0\\ 0 & \exp-\frac{1}{2}ic\end{pmatrix}=I\cos c/2+i\sigma_3\sin c/2. \tag{4.263}$$

●这些构造常数（ie_{ijk}）对于次数为$2j+1$的生成元，推导出$2j+1$维的SU（2）表示。$j=0$，$\frac{1}{2}$，1，$\frac{3}{2}$，……如4.9节所讨论的，整数的j推导出O_3^+的表示。

根据指数函数的这种公式化，$SU(2)$ 矩阵的一般形式可写成

$$U(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\exp\frac{1}{2}i\gamma\sigma_3\right)\left(\exp\frac{1}{2}i\beta\sigma_2\right)$$

$$\times\left(\exp\frac{1}{2}i\alpha\sigma_3\right) \qquad (4.264)$$

这不过是再一次推导出4.9节的（4.228）。泡里矩阵的选择和4.3节以及4.9节所说的欧拉角旋转相对应。

以后的无穷小旋转的例子——指数生成元的技巧，在4.12节再讨论。

习　题

4.10.1 平行移动算符 $T(a)$ 使 $\psi(x)$ 变成 $\psi(x+a)$。

$$T(a)\psi(x)=\psi(x+a)。$$

利用（量子力学的）动量算符 $p_x=-i\frac{d}{dx}$ 试证明

$$T(a)=\exp iap_x。$$

提示：将 $\psi(x+a)$ 按泰勒级数展开之。

4.10.2 考虑一般的 $SU(2)$ 的元（4.201），作出三个欧拉旋转；i）围绕 z 轴旋转 $a/2$，ii）围绕新 x 轴旋转 $b/2$，iii）围绕新 z 轴旋转 $c/2$（都是逆时针的）。利用泡里的 σ 矩阵的生成元，证明这些旋转角由

$$a=\xi-\zeta+\frac{\pi}{2}=\alpha+\frac{\pi}{2}$$

$$b=2\eta \qquad =\beta$$

$$c=\xi+\zeta-\frac{\pi}{2}=\gamma-\frac{\pi}{2}$$

决定。

注意：角度 a 和 b 在这里不是（4.200）的 a 和 b。

4.10.3 欧拉角旋转的算符，是角动量的指数函数。可写成

$$\mathscr{R}=\mathscr{R}_{z''}(\gamma)\ \mathscr{R}_{y'}(\beta)\ \mathscr{R}_{z}(\alpha)$$
$$=\exp-i\gamma J_{z''}\exp-i\beta J_{y'}\exp-i\alpha J_{z}$$

证明利用起初的坐标轴，可表示成

$$\mathscr{R}=\exp-i\alpha J_{z}\exp-i\beta J_{y}\exp-i\gamma J_{z}$$

提示：$\mathscr{R}$ 算符象矩阵那样变换，y' 轴的旋转（第2欧拉旋转）和原来的 y 轴通过

$$\exp-i\beta J_{y'}=\exp-i\alpha J_{z}\exp-i\beta J_{y}\exp i\alpha J_{z}$$

结合起来。

4.11 SU(2)，SU(3) 和基本粒子

群论在基本粒子的应用，维格纳把它叫做群论和物理结合的第3阶段。第1阶段如4.8节是发现给出晶体对称性的32个点群和230个空间群。第2阶段如4.9节是寻找 O_3^+ 和 SU（2）的表示。现在是第3阶段，物理学者又回过头来寻找新的群。

在讨论高能物理学里进行强相互作用的粒子和特殊么正群 SU（2）以及 SU（3）当中，作为类推回顾一下角动量和 O_3^+ 是有益的。假定电子在某原子核的球对称引力势中运动。电子的薛定谔波函数以三个量子数 n，l，m 为特征。但能量的简并度为 $2l+1$，只依赖于 n 和 l ❶。这种简并的原因可用两个等同的方法来加以解释。

1．势能是球对称的，因而与 θ 和 φ 无关。

2．薛定谔的哈密顿 $-(\hbar^2/2m_e)\nabla^2+V(r)$ 在通常的空间旋转 O_3^+ 之中是不变的。

❶如果势能是纯库伦势时，则能量只依赖于 n。

作为势能球对称的结果，角动量L是守恒的。在4.10节用直角坐标分量，L规定为旋转群O_3^+的生成元。L_x、L_y、L_z不是算符而是矩阵，4.2节末尾给出$l=1/2$，1及3/2的例题。L_i矩阵为$(2l+1)\times(2l+1)$矩阵。它的维数和简并后的状态数目相同●。这些L_i矩阵生成O_3^+的$(2l+1)\times(2l+1)$既约表示。次数$2l+1$规定$2l+1$个简并状态。求这个简并的一般方法是加上一定的磁感应强度B。这会引起塞曼效应。这个磁感应强度会对薛定谔的哈密顿加上在O_3^+下变化的项。这是破坏对称性的项。

有强相互作用的粒子（中子，质子等）的情形，我们不能直接想象，原因是我们对核子的相互作用完全不清楚。哈密顿也不知道。我们只好从头来寻找类似性。

1930年代海森堡根据核力与电荷无关，于是宣称，当时知道的仅有的两个重子（Baryon）即中子和质子是不同状态的同一粒子。表4.2表明，它们有着几乎相同的质量。相对差$(m_n-m_p)/m_p\approx0.0014$很小，暗示着质量差由于和微量电量有关的微扰引起的。为了描述接近于这个简并的状态，引入某个量I实为方便。这个量在z轴上的投影$I_3=1/2$对应于质子，而$-1/2$对应于中子，I叫做同位旋、同位旋虽和自旋（粒子的内禀角动量）无任何联系，可是2分量的同位旋状态矢量和自旋$j=1/2$的状态矢量遵循相同的数学关系，特别是要求取成泡里σ_3矩阵的本征矢。

没有与电荷有关的力时，同位旋是守恒的（质子和中子有相同的质量）有2度简并。我们尚不清楚的核的哈密顿在由同位旋矩阵生成的群里必须保持不变。用同位旋矩阵刚好

●以L_i为矩阵，用状态矢量（有$2l+1$个分量）置换薛定谔波函数$\psi(r,\theta,\varphi)$。

是三个泡里矩阵（(2×2）矩阵），生成的 群 成为 4.9 节的 $SU(2)$ 群，对应于简并度为 2 的2×2矩阵。

到1961年为止，又发现了很多粒子．表 4.2 列举的 8 个特别引人注目●。用特殊的量子数，同位旋 I 和超荷 Y 来说明这些问题是颇为方便的。

表4.2 重子（自旋1/2偶宇称）

		质　量(MeV)	Y	I	I_3
Ξ	Ξ^-	1321.300	-1	$\frac{1}{2}$	$-1/2$
	Ξ_0	1314.900			$+1/2$
Σ	Σ^-	1197.410	0	1	1
	Σ^0	1192.540			0
	Σ^+	1189.470			$+1$
Λ	Λ	1115.500	0	0	0
N	n	939.550	1	$\frac{1}{2}$	$-1/2$
	p	938.256			$+1/2$

粒子可以按电荷及同位旋的多重项来划分，超荷Y 可按该多重项的平均电荷的二倍来取．对中子—质子的多重项来讲，有

$$Y=2\times\frac{1}{2}\ (0+1)\ =1 \qquad (4.265)$$

超荷和同位旋的数值列于表4.2。

根据散射和生成实验已搞清楚超荷Y 和同位旋 I 两者在强（核的）相互作用下都是守恒的。可联想到在球对称哈密

●质量都用能量单位MeV

顿情况下L（或l）是守恒的。看起来这8个粒子的简并度似乎是8。可是现在认为两个量是守恒的。1961年盖尔曼和诺曼分别独立地发现，强相互作用在三维特殊么正群$SU(3)$之下是不变的，即暗示着$SU(3)$具有对称性。选择$SU(3)$的根据首先就是两个守恒量的存在。这表明是阶数为2的群，即只有两个生成元进行交换的群。第2，该群具有8×8表示，必须描述简并度为8的重子。$SU(3)$是$SU(2)$的最简单的推广，盖尔曼作出了8个生成元。三个是同位旋分量，一个是超荷，相当于四个附加量，它们都是3×3矩阵的迹为零的矩阵。和O_3^+及$SU(2)$一样，存在无数个既约表示，但可使它的一个8维矩阵对应于表4.2的8个粒子●。

对应8个重子的哈密顿可认为由三个部分组成

$$H=H_{强}+H_{介质}+H_{电磁} \tag{4.266}$$

第1部分$H_{强}$具有$SU(3)$的对称性，带来8度简并。加入破坏相互作用$H_{介质}$时，四个同位旋多重项Ξ，Σ，Λ，N发生分解，解除了它的简并，但$H_{介质}$为使$SU(2)$保持对称性，还要剩下多重项。最后有依赖于电荷的力时，同位旋多重项分开把最后的简并去掉了。如图4.13所示

利用量子力学的一级微扰时，可计算出重子的质量间的简单关系，并能求得衰变及散射过程的强度。

大概这个$SU(3)$模型最重大的成功之处是对新粒子的预言。1961年觉察到4个K介子和π介子（都是赝标量，自旋为0，奇宇称）和重子八重项相同是另一个多重项。$SU(3)$理论预言第8个介子η^0的质量为563MeV。随后不久在实验上定出η^0介子质量为548MeV。将群论应用于更重的9个重子

● 盖尔曼把这个$SU(3)$的应用叫做8道说，须注意$SU(3)$的8个独立参数（由n^2-1决定）对应于8个生成元及8个粒子的表示。这个命名也和佛教的八道说有关。

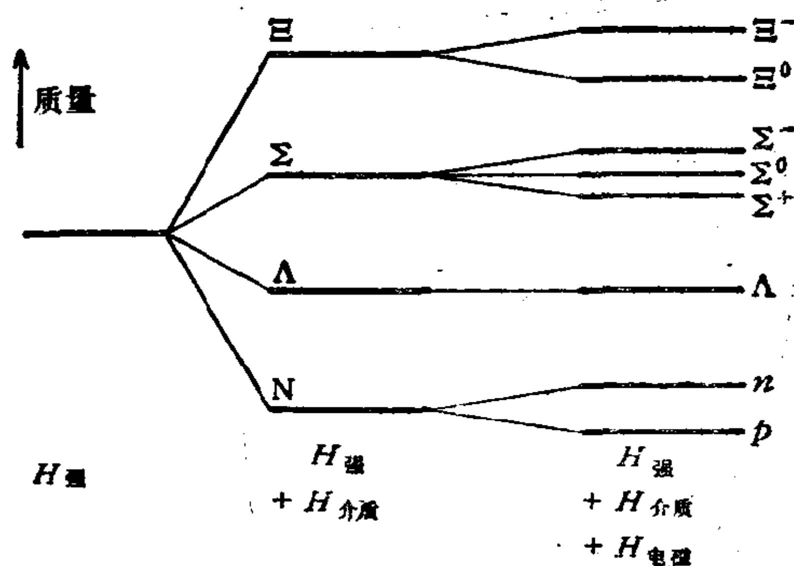


图 4.13

（自旋都是 3/2，偶宇称），推想出 10 元群即 10 重项，预言了还没有看到的第10个重子具有约1680MeV的质量和负的电荷。1964年果然看到了带负电的Ω^-，质量为 1675±12MeV。

这个$3/2^+$10 重项完成以后，明确了就重子来讲是$5/2^-$（奇宇称）多重项，就介子来讲是1^-及2^+多重项。

群论对有强相互作用的粒子的应用，超过了 $SU(3)$，进行了推广。有 $SU(6)$ 的广泛研究以及更复杂的高次群。群生成元或生成元对易关系里的构造常数（对轨道角动量来讲是 ε_{ijk}）也受到很大重视。这些构造常数定义李代数。将流密度的空间积分和群的生成元结合起来是可能的，这就进入了近世代数，那就远远超出本书所讨论的范围。为把群论和它非常实际的成果放在通常的看法之内，必须强调群论不外乎是定义对称性并加以公式化。它把粒子进行分类（有时是预想）。其哈密顿除了一部分有 $SU(2)$ 对称性其它部分有 $SU(3)$ 对称性以外，群论对粒子的相互作用什么也不会告诉我们。不要忘记原子势能的球对称解释对于势能对径向

分量的依赖性或者波函数都没有告诉我们什么东西。

4.12 齐次洛仑兹群

把1.2节向矢量的接近加以推广，物理定律对

(a) 空间和时间的平移，

(b) 实际的三维空间的旋转，

(c) 洛仑兹变换

要求是协变的●

平移的协变性要求，基于时空的均匀性。旋转的协变性是强调空间的均匀性。洛仑兹协变性要求是建立在承认狭义相对论的基础之上。把以上三个变换放在一起形成非齐次洛仑兹群即彭加瑞群。其中除平移以外，把空间旋转和洛仑兹变换合在一起作成一个群，即齐次洛仑兹群。

首先生成某子群，即洛仑兹变换，其中取相对速度v沿着 $x=x_1$ 轴、认为洛仑兹时空的基准系以无穷小的相对速度 δv 移动，可确定生成元●。表达式和实空间旋转一样（1.2，3.1，4.3节）。但其中旋转角是纯虚数这一点是不同的。（参考3.7节）。

假设 $x_4=ict$ 考虑闵可夫斯基空间。在无穷小的相对速度 δv 下时空变换是伽利略变换

$$x_1'=x_1-\delta vt=x_1+i\delta\beta x_4 \qquad (4.267)$$

其中设$\beta=\dfrac{v}{c}$、根据对称性，可写成

$$x_4'=x_4+ia\delta\beta x_1 \qquad (4.268)$$

a是根据$x_1^2+x_4^2$不变的要求能够确定的参数。

● 所谓协变性是指在不同坐标系里具有相同形式，描述定律不需要特殊的坐标系（参考1.2节，3.1节）。

● 利用稍有不同的距离进行这一推导，出现于J.L.Strecker的论文 Am, J, Phys, 35, 12 (1967)

$$x_1'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_4^2 \tag{4.269}$$

不会忘记 x^μ 就是闵可夫斯基空间的 4 维矢，将（4.267）和（4.268）平方后再相加，舍去 $(\delta\beta)^2$ 的项，则有 $a = -1$。整理（4.267）和（4.268），得矩阵方程

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_4' \end{pmatrix}_{\delta\beta} = (1 + \delta\beta\sigma_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{4.270}$$

σ_2 为泡里矩阵改变 σ_y 的符号即得。

参数 $\delta\beta$ 代表无穷小的变化量，所以利用和 4.10 节相同的技巧，重复进行 N 次变换作成速度参数 $\theta = N\delta\beta$ 的有限变换

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_4' \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{\theta\sigma_2}{N}\right)^N \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{4.271}$$

在 $N \to \infty$ 的极限

$$\lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{\theta\sigma_2}{N}\right)^N = \exp\theta\sigma_2. \tag{4.272}$$

和4.10节一样，指数函数可解释为麦克劳林展开

$$\exp\theta\sigma_2 = 1 + \theta\sigma_2 + (\theta\sigma_2)^2/2! + (\theta\sigma_2)^3/3! + \cdots \tag{4.273}$$

注意 $\sigma_2^2 = 1$

$$\exp\theta\sigma_2 = I\cosh\theta + \sigma_2\sinh\theta. \tag{4.274}$$

于是有限的洛仑兹变换，变成

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & i\sinh\theta \\ -i\sinh\theta & \cosh \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{4.275}$$

σ_2 生成这个特殊洛仑兹变换。

$\cosh\theta$ 和 $\sinh\theta$ 在考虑带撇坐标系原点以后就可确定，把 $x_1' = 0$ 即 $x_1 = vt$ 代入（4.275）

$$0 = x_1\cosh\theta + x_4 i\sinh\theta. \tag{4.276}$$

其中让 $x_1 = vt$ 及 $x_4 = ict$

$$\tanh\theta = \beta.$$

利用$1-\tanh^2\theta=(\cosh^2\theta)^{-1}$时

$$\cosh\theta=(1-\beta^2)^{1/2}=\gamma,\quad \sinh\theta=\beta\gamma \tag{4.277}$$

(4.275) 的矩阵和 (3.120) 的x_3，x_4的部分是一致的。

以上是用来说明无穷小速度的生成元技巧．速度和一个空间轴相平行的特殊情形比较简单。我们把推导出这个洛仑兹变换的正确技巧，用到相对速度 v 和任一空间轴都不平行的情形看看会怎样。

设$v_1=\lambda|\mathbf{v}|$，$v_2=\mu|\mathbf{v}|$ 以及 $v_3=\nu|\mathbf{v}|$，λ，μ，ν 为 v 的方向余弦，从 (4.267) 的类推，有

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1+i\lambda\delta\beta x_4 \\ x_2' &= x_2+i\mu\delta\beta x_4 \\ x_3' &= x_3+i\nu\delta\beta x_4. \end{aligned} \tag{4.278}$$

再根据对称性

$$x_4'=x_4+ia_1\delta\beta x_1+ia_2\delta\beta x_2+ia_3\delta\beta x_3 \tag{4.279}$$

由

$$\sum_{\xi=1}^{4}x_\xi'^2=\sum_{\xi=1}^{4}x_\xi^2, \tag{4.280}$$

得 $a_1=-\lambda$，$a_2=-\mu$，$a_3=-\nu$。将 (4.278) 和 (4.279) 作为矩阵方程改写之

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i\lambda\delta\beta \\ 0 & 1 & 0 & i\mu\delta\beta \\ 0 & 0 & 1 & i\nu\delta\beta \\ -i\lambda\delta\beta & -i\mu\delta\beta & -i\nu\delta\beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{4.281}$$

减去 I，$\delta\beta$ 作为因子取出时，有

$$\mathbf{x}'=(I+\delta\beta\sigma)\mathbf{x}. \tag{4.282}$$

其中

$$\sigma=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i\lambda \\ 0 & 0 & 0 & i\mu \\ 0 & 0 & 0 & i\nu \\ -i\lambda & -i\mu & -i\nu & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.283}$$

直接求乘积（但$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$）

$$\sigma^2=\begin{pmatrix}\lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu & 0\\ \lambda\mu & \mu^2 & \mu\nu & 0\\ \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{4.284}$$

于是

$$\sigma^3=\sigma \tag{4.285}$$

和以上相同，让 $\theta=N\delta\beta$ 重复进行 N 次

$$\lim_{N\to\infty}(I+\theta\sigma/N)^N=e^{\theta\sigma}$$

$$=I+\sigma\sinh\theta+\sigma^2(\cosh\theta-1) \quad . \tag{4.286}$$

σ为生成元，含有确定其中速度方向的参数λ，μ，ν。写出（4.286）的第二项，洛仑兹变换的全貌为

$L(v)=$

$$\begin{pmatrix}1+\lambda^2(\cosh\theta-1) & \lambda\mu(\cosh\theta-1) & \lambda\nu(\cosh\theta-1) & i\lambda\sinh\theta\\ \lambda\mu(\cosh\theta-1) & 1+\mu^2(\cosh\theta-1) & \mu\nu(\cosh\theta-1) & i\mu\sinh\theta\\ \lambda\nu(\cosh\theta-1) & \mu\nu(\cosh\theta-1) & 1+\nu^2(\cosh\theta-1) & i\nu\sinh\theta\\ -i\lambda\sinh\theta & -i\mu\sinh\theta & -i\nu\sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix} \tag{4.287}$$

其中仍是$\theta=(1-\beta^2)^{-1/2}=\gamma$。$\sinh\theta=\beta\gamma$。

　　整理（4.286）和（4.287）

须注意

$$L(\mathbf{v})=e^{\theta\sigma} \tag{4.288}$$

并未成为（4.237）的正确形式。因为指数部分缺少因子i，所以$L(\mathbf{v})$并不是么正的。

　　在$\mathbf{v}=iv_x$的情形，由（4.275）所确定的矩阵虽作成子群，可是（4.287）作不出它。如果两个速度$\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_2$平行时，则两个洛仑兹变换矩阵$L(\mathbf{v}_1)$和$L(\mathbf{v}_2)$的乘积给出第3个洛仑兹矩阵$L(\mathbf{v}_3)$。结果的速度$\mathbf{v}_3$按照爱因斯坦速度加法

定理，和$\mathbf{v}_1$及$\mathbf{v}_2$联系在一起。（3.7节）如$\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_2$不是平行的，就没有这种简单的关系。特别是考虑三个基准系s, s'，s''。则s和s'通过$L(\mathbf{v}_1)$，而s'和s''通过$L(\mathbf{v}_2)$相互联系。若s''的速度对开始的系统相对的为$\mathbf{v}_3$，就不能只根据$L(\mathbf{v}_3)$从s得到s''，则

$$L(\mathbf{v}_3)=RL(\mathbf{v}_2)L(\mathbf{v}_1) \qquad (4.289)$$

R为3×3空间旋转矩阵，掩盖于四维时空之中，若$\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_2$不平行时，则最后的系统s''对于s作相对的旋转。这个旋转来源于原子及原子核里包含于自旋—轨道耦合的托马斯进动，由于这种存在，使得$L(\mathbf{v})$本身不能作成群。

习　题

4.12.1 微分（4.287）的最后矩阵，求出$\sigma(\lambda, \mu, \nu)$。

4.12.2 继续进行两个洛仑兹变换。先假设沿x轴为$\mathbf{v}_1$，其次沿y轴为$\mathbf{v}_2$，证明这个结果的变换（由这两个连续变换的乘积来决定）不能整理成(4.287）的形式。注意：这个矛盾是由旋转造成的。

参 考 文 献

Aitken, A. C., *Determinants and Matrices*, New York: Interscience Publishers (1956)．行列式和矩阵的易读入门书．

Bickley. W. G., and R. S. H. G. Thompson, *Matrices—Their Meaning and Manipulation*. Princeton, New Jersey: Van Nostrand (1964) 有关物理问题中矩阵的出现，其解析性质，数值计算的技巧总的描述．

Buerger, M. J., *Elementary Crystallography*. New York: Wiley (1956)．就晶体的对称性的广泛讨论．Buerger就所有32个点群和230个空间群进行展开．

Falicov, L. M., *Group Theory and Its Physical Applications*.

A. Luehrmann的注释，Chicago：University of Chicago Press(1966)。加强了晶体的对称性和在固体物理的应用的群论。

Gell-Mann, M., and Ne'eman, Y. *The Eightfold Way*. New York：Benjamin (1965)$SU(3)$ 和高能物理优秀论文的论文集。Gell-Mann和Ne'eman的若干绪论特别有用。

Hamermesh, M., *Group theory and Its Application to Physical Ptoblems*. Reading, Massachustts：Addison-Wesley (1962)，有限群和连续群详细且严密的讨论，32 个点群的展开，连续群也包括李代数。原子和原子核物理的丰富应用，

Higman, B., *Applied Group-Theoretic and Matrix Methods*. New York：Dover (1964)，Oxford University Press (1955) 矩阵分析和群论很完全且容易理解的展开。

Michael, A. D., *Matrix and Tensor Calculus with Applications to Mechanics, Elasticity and Aeronautics*, New York：Wiley(1947) 矩阵与张量非常流畅的阐述，且有矩阵与张量计算的展开。

Ram, B., *Am, J, Phys*, 35, 16 (1967). 在$SU(3)$ 强相互作用粒子（重子）上应用的出色讨论。

Rose, M, E., *Elementary Theory of Angular Momentum*. New York：Wiley (1957) 有关角动量的量子力学的一部分，Rose把旋转群的详细易懂的描述包括进去。

Wigner, E. P. *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. Translated by J.J. Griffin. New York and London：Academic Press (1959) 这是原子物理的群论的经典参考书。旋转群的讨论很详细，原子物理学的应用也很丰富。

日文版译者后记

这本书的特点简单讲，是非常恳切的一本书。在翻译的过程中，这种感受越来越深。著者在前言里讲，是通过18年教学的辛勤结晶，决非夸张。仅仅是整理18年的讲义，是不可能完成这样一本书的。年复一年倾注全部心血的苦心结晶才形成这本书。本书的阐述乍看起来似乎恳切周到得有些冗长，但决不是毫无意义地徒占篇幅。对于读者容易纠缠不清的地方，容易产生疑团的地方都作了详尽的阐述，相反，对于读者易于接受的地方在不损害数学的严格性，逻辑上的完整性的前提下一带而过。对于想知道更详细些的读者，在各章末尾亲切地介绍了有关文献。

习题的精选是这本书的一大特色。难易程度适宜，数量也颇为丰富，尤其是为其富有多样性内容而惊倒。在选材上详及整个有关物理学科，从原理的纯理论的事项一直到极为实际的应用，从经典的历史的问题一直到今天在第一线的研究人员正在忙得不可开交的最新课题，用这些材料编出有独创性的习题，足见著者的水平和辛勤努力非同小可，读者通过一一接触这些习题，对各有关领域的数学，不单单停留于理解而且为实际应用进行实际训练，同时使之产生浓厚的兴趣。

对于译者来讲，首先要考虑的是不要损害原书的特点，然而这是困难的。只要英语和日语有着基本性格的差别，就给翻译工作带来困难，这本是意料之中的，可是在这本书里，几乎是相同的内容，巧妙地逐步深入揭示出来，变换各种说

法的地方很多。为了表现这种巧妙的语言上的微妙差别，而且在短时间内用精练的日语把它创作出来，坦白讲对于我所具有国语水平实在难以做到。

对于术语来讲，考虑便于初学者以遵照《文部省·学术用语集》为准。实际上这个用语集从我们的习惯来讲不熟习的表现还是很多的。除非不得已我们觉得这样作对初学者是方便的。相反对于有经验的读者也许反而不便，为此编了一个日英对照的索引。

对于译者来讲，虽倾注了相当多的时间和精力，难免尚有推敲不够的地方，译者三人不够协调一致的地方也在所难免。虽特别注意了正确性，但意料不到的错误也许会有，请多加批评指正，以期以后有机会加以修订。

昭和52年（公历1977年——中译者注）8月

日译者